Integrazione diretta della funzione potenza e applicazioni al logaritmo

Fabio Punzo

(Politecnico di Milano)

Seminario FDS - DMAT Politecnico di Milano

12 febbraio 2025

a@p

analysis@polimi

Introduzione del problema

Calcoleremo, utilizzando solamente la sua definizione, l'integrale definito

$$\int_a^b x^\alpha \mathrm{d}x,$$

essendo $\alpha \in \mathbb{Q},\ 0 < a < b$.

Introduzione del problema

Calcoleremo, utilizzando solamente la sua definizione, l'integrale definito

$$\int_a^b x^\alpha \mathrm{d}x,$$

essendo $\alpha \in \mathbb{Q},\ 0 < a < b$.

- Successivamente, *facendo finta di non conoscerla*, definiremo la funzione $x \mapsto \log x$ come funzione integrale.

Introduzione del problema

Calcoleremo, utilizzando solamente la sua definizione, l'integrale definito

$$\int_a^b x^\alpha \mathrm{d}x,$$

essendo $\alpha \in \mathbb{Q},\ 0 < a < b$.

- Successivamente, *facendo finta di non conoscerla*, definiremo la funzione $x \mapsto \log x$ come funzione integrale.
- Sulla base del calcolo dell'integrale precedente, dedurremo alcune proprietà importanti del logaritmo.

Introduzione del problema

Calcoleremo, utilizzando solamente la sua definizione, l'integrale definito

$$\int_a^b x^\alpha \mathrm{d}x,$$

essendo $\alpha \in \mathbb{Q},\ 0 < a < b$.

- Successivamente, *facendo finta di non conoscerla*, definiremo la funzione $x \mapsto \log x$ come funzione integrale.
- Sulla base del calcolo dell'integrale precedente, dedurremo alcune proprietà importanti del logaritmo.
- *Facendo finta di non saper dar senso a potenze con esponente reale*, definiremo e dedurremo alcune proprietà della funzione $x \mapsto e^x$, vedendola come funzione inversa di quella logaritmica.

Da ricordare...

- numeri reali, densità dei razionali in $\mathbb{R}$

Da ricordare...

- numeri reali, densità dei razionali in $\mathbb{R}$
- funzioni monotòne;

Da ricordare...

- numeri reali, densità dei razionali in $\mathbb{R}$
- funzioni monotòne;
- funzione iniettiva, suriettva; funzione inversa

Da ricordare...

- numeri reali, densità dei razionali in $\mathbb{R}$
- funzioni monotòne;
- funzione iniettiva, suriettva; funzione inversa
- somma di una progressione geometrica di ragione $x \neq 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \qquad \sum_{i=1}^{n} x^i = x\frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Da ricordare...

- numeri reali, densità dei razionali in $\mathbb{R}$
- funzioni monotòne;
- funzione iniettiva, suriettva; funzione inversa
- somma di una progressione geometrica di ragione $x \neq 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \qquad \sum_{i=1}^{n} x^i = x\frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

- limiti di successioni numeriche, limite notevole

$$\sqrt[n]{\beta} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad (\beta > 0);$$

Da ricordare...

- numeri reali, densità dei razionali in $\mathbb{R}$
- funzioni monotòne;
- funzione iniettiva, suriettva; funzione inversa
- somma di una progressione geometrica di ragione $x \neq 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \qquad \sum_{i=1}^{n} x^i = x\frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

- limiti di successioni numeriche, limite notevole

$$\sqrt[n]{\beta} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad (\beta > 0);$$

- numero di Nepero

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- limiti e continuità di funzioni di una variabile reale

- limiti e continuità di funzioni di una variabile reale
- monotonìa e continuità della funzione inversa

- limiti e continuità di funzioni di una variabile reale
- monotonìa e continuità della funzione inversa
- integrale definito di una funzione, proprietà di base e teorema della media integrale.

- limiti e continuità di funzioni di una variabile reale
- monotonìa e continuità della funzione inversa
- integrale definito di una funzione, proprietà di base e teorema della media integrale.

  Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, allora esiste* $\eta \in [a, b]$ *tale che*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\eta)(b - a).$$

- limiti e continuità di funzioni di una variabile reale
- monotonìa e continuità della funzione inversa
- integrale definito di una funzione, proprietà di base e teorema della media integrale.

  Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, allora esiste* $\eta \in [a, b]$ *tale che*

  $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\eta)(b - a).$$

- funzione integrale, sue proprietà di base:
  f continua e positiva $\Rightarrow F(x) := \int_a^x f(t)dt$ è continua e crescente.

Da dimenticare...

- $\log x$
- $\log_a x \; (a > 0, a \neq 1)$
- e^x
- a^x con $a > 0, x \in \mathbb{R}$

Da dimenticare...

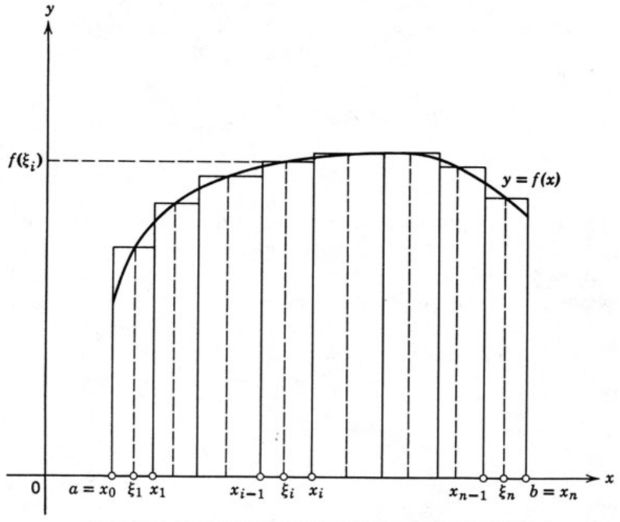
- $\log x$
- $\log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$
- e^x
- a^x con $a > 0, x \in \mathbb{R}$
- Teorema fondamentale del calcolo integrale (in particolare, la formula per il calcolo degli integrali definiti)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$.
Dato $n \in \mathbb{N}$, scegliamo $n + 1$ punti $x_i \in [a, b]$ tali che

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Inoltre, per ogni $i = 1, \ldots, n$, consideriamo un punto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
Definiamo la somma

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$


y
$f(\xi_i)$
$y = f(x)$
x
0
$a = x_0$
ξ_1
x_1
x_{i-1}
ξ_i
x_i
x_{n-1}
ξ_n
$b = x_n$

Supponiamo che $\forall i = 1, \dots, n, \quad x_i - x_{i-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$
Si vede che esiste finito il limite

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Tale limite *non* dipende dalla scelta di x_i, ξ_i.

Supponiamo che $\forall i = 1, \dots, n, \quad x_i - x_{i-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$
Si vede che esiste finito il limite

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Tale limite *non* dipende dalla scelta di x_i, ξ_i.

L'integrale definito di f su $[a, b]$ si definisce come

$$\int_a^b f(x)dx := S.$$

Integrazione di x^α con $\alpha \neq -1$

Teorema 1

Siano $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \neq -1, 0 < a < b$. Allora

$$\int_a^b x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}\left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right).$$

Integrazione di x^α con $\alpha \neq -1$

Teorema 1

Siano $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \neq -1, 0 < a < b$. Allora

$$\int_a^b x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha + 1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).$$

La dimostrazione che vedremo si trova in alcuni libri. L'idea originaria è dovuta a Fermat nel 1636.

Integrazione di x^α con $\alpha \neq -1$

Teorema 1

Siano $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \neq -1, 0 < a < b$. Allora

$$\int_a^b x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}\left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right).$$

La dimostrazione che vedremo si trova in alcuni libri. L'idea originaria è dovuta a Fermat nel 1636.

Dimostrazione. $\boxed{\alpha \in \mathbb{N}}$

Il calcolo dell'integrale

$$\int_a^b x^\alpha \mathrm{d}x$$

si basa sulla definizione ricordata prima e su una scelta opportuna degli x_i, ξ_i.

Siano $n \in \mathbb{N}$,

$$q := \sqrt[n]{\frac{b}{a}}\,.$$

Prendiamo

$$x_i = aq^i \quad i = 0, \dots n.$$

Stiamo dunque dividendo l'intervallo $[a, b]$ facendo uso dei punti della progressione geometrica

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^n = b.$$

Notiamo che

$$x_i - x_{i-1} = aq^i - aq^{i-1} = aq^{i-1}(q-1) = \frac{aq^i(q-1)}{q} \quad i = 1, \dots, n.$$

Dunque $i \mapsto x_i - x_{i-1}$ è crescente.

$$0 < x_i - x_{i-1} < x_n - x_{n-1} = \frac{b(q-1)}{q} \quad \forall i = 1, \dots n-1.$$

In altre parole, il sotto-intervallo di ampiezza più grande è $[x_{n-1}, x_n]$ e la sua ampiezza è

$$\frac{b(q-1)}{q}.$$

Ricaviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b(q-1)}{q} = 0,$$

perché

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ricaviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b(q-1)}{q} = 0,$$

perché

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Pertanto

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad x_i - x_{i-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ora passiamo alla scelta di ξ_i e al calcolo di S_n.

Ricaviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b(q-1)}{q} = 0,$$

perché

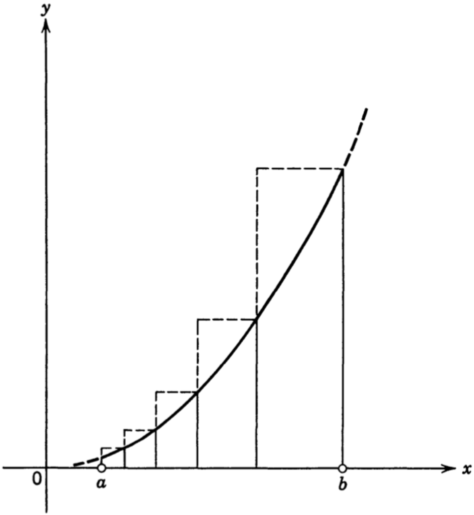
$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Pertanto

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad x_i - x_{i-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ora passiamo alla scelta di ξ_i e al calcolo di S_n.

In generale $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Noi scegliamo $\xi_i = x_i$.


y
0
a
b
x

Si ha

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\alpha}(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} (aq^i)^{\alpha} aq^i \frac{q-1}{q} \\ &= a^{\alpha+1} \frac{q-1}{q} \sum_{i=1}^{n} (q^{1+\alpha})^i. \end{aligned} \tag{1}$$

Utilizzando la formula per la somma di una progressione geometrica (che parte da 1) si ha

$$\begin{aligned} S_n &= a^{\alpha+1} \frac{q-1}{q} q^{\alpha+1} \frac{q^{n(\alpha+1)}-1}{q^{\alpha+1}-1} \\ &= a^{\alpha+1}(q-1)q^{\alpha} \frac{\frac{b^{\alpha+1}}{a^{\alpha+1}}-1}{q^{\alpha+1}-1} = (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})q^{\alpha} \frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ancora grazie alla formula per la somma di una progressione geometrica (che parte da 0), abbiamo che

$$\frac{q-1}{q^{1+\alpha}-1} = \frac{1}{1+q+q^2+\ldots q^{\alpha}}.$$

Dunque

$$S_n = (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})q^{\alpha}\frac{1}{1+q+q^2+\ldots q^{\alpha}}.$$

Ancora grazie alla formula per la somma di una progressione geometrica (che parte da 0), abbiamo che

$$\frac{q-1}{q^{1+\alpha}-1} = \frac{1}{1+q+q^2+\dots q^{\alpha}}.$$

Dunque

$$S_n = (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) q^{\alpha} \frac{1}{1+q+q^2+\dots q^{\alpha}}.$$

Conseguentemente, poiché $q \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$,

$$S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

$\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \neq -1$

Gli stessi calcoli di prima si possono ripetere, fino a scrivere:

$$\begin{aligned}
S_n &= (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) q^{\alpha} \frac{q-1}{q^{\alpha+1} - 1} \\
&= (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \frac{q-1}{q^{-\alpha}(q^{\alpha+1} - 1)} = (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \frac{q-1}{q(1 - q^{-\alpha-1})} \qquad (3) \\
&= \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{q} \frac{q-1}{(1 - q^{-\alpha-1})} = -\frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{q} \frac{q-1}{q^{-\alpha-1} - 1}.
\end{aligned}$$

$\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \neq -1$

Gli stessi calcoli di prima si possono ripetere, fino a scrivere:

$$\begin{aligned} S_n &= (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) q^{\alpha} \frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1} \\ &= (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \frac{q-1}{q^{-\alpha}(q^{\alpha+1}-1)} = (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \frac{q-1}{q(1-q^{-\alpha-1})} \qquad (3) \\ &= \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{q} \frac{q-1}{(1-q^{-\alpha-1})} = -\frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{q} \frac{q-1}{q^{-\alpha-1}-1}. \end{aligned}$$

Ora, ricordiamo che $-\alpha \geq 2$; perciò $-\alpha - 1 \geq 1$. Dunque, come sopra,

$$\frac{q-1}{q^{-\alpha-1}-1} = \frac{1}{1+q+q^2+\ldots+q^{-\alpha-1}}.$$

Notiamo che

$$\frac{1}{q+q^2+\ldots+q^{-\alpha-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{-\alpha-1}.$$

Pertanto

$$S_n = -\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{q}\frac{1}{1+q+q^2+\ldots+q^{-\alpha-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})\frac{1}{\alpha+1}.$$

$\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \neq -1$

Per $\alpha > 0$, si pone $\alpha = \frac{r}{s}$ con $r, s \in \mathbb{N}$. Si procede analogamente a prima

Per $\alpha < 0$, si pone $\alpha = -\frac{r}{s}$ con $r, s \in \mathbb{N}$ e si procede.

$\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \neq -1$

Per $\alpha > 0$, si pone $\alpha = \frac{r}{s}$ con $r, s \in \mathbb{N}$. Si procede analogamente a prima

Per $\alpha < 0$, si pone $\alpha = -\frac{r}{s}$ con $r, s \in \mathbb{N}$ e si procede.

Omettiamo i dettagli. $\square$

Se $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha > 0$, con piccoli aggiustamenti nel precedente calcolo, si ottiene chiaramente anche che

$$\int_0^b x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha + 1} b^{\alpha+1}.$$

Integrazione di $\frac{1}{x}$

Teorema 2

Siano $0 < a < b$. Allora

$$\int_a^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right).$$

Dimostrazione. Per la definizione di S_n, abbiamo che

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{aq^i} aq^i \frac{q-1}{q} \\ &= n\frac{q-1}{q}. \end{aligned} \tag{4}$$

Teorema 2

Siano $0 < a < b$. Allora
$$\int_a^b \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} n \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right).$$

Dimostrazione. Per la definizione di S_n, abbiamo che
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{aq^i} aq^i \frac{q-1}{q} \\ &= n\frac{q-1}{q}. \end{aligned} \tag{4}$$

Ricordando che $q \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$, possiamo concludere che
$$\int_a^b \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} n \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right). \quad \square$$

Il logaritmo definito da un integrale

Definizione 1

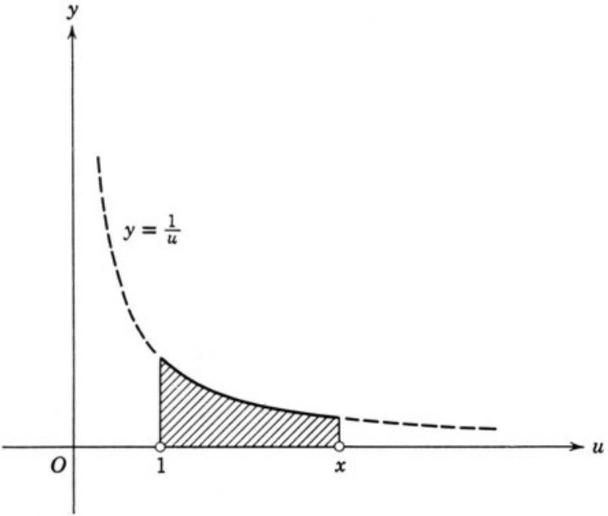
Per ogni $x > 0$, definiamo

$$\log x := \int_1^x \frac{1}{u} \mathrm{d}u \,.$$

Dal Teorema 2 segue che

$$\log x = \lim_{n\to\infty} n \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right) \quad \forall x > 0.$$

Evidentemente, $\log x$ rappresenta l'area sottostante il grafico dell'iperbole $y = \frac{1}{u}$, come indicato nel disegno:



Il collegamento tra logaritmo ed area sottostante una iperbole è una idea molto vecchia. Pare sia stata messa in luce (partendo dalla definizione usuale di logaritmo, che non fa uso dell'integrale) da Gregorio di San Vincenzo (gesuita e matematico fiammingo) nel 1647 e dal suo collaboratore Alfonso Antonio Sarasa (gesuita e matematico belga) nel 1649.

Prime proprietà

Poiché $u \mapsto \frac{1}{u}$ è continua e positiva per ogni $u > 0$, la funzione $x \mapsto \log x$ è

Prime proprietà

Poiché $u \mapsto \frac{1}{u}$ è continua e positiva per ogni $u > 0$, la funzione $x \mapsto \log x$ è

- definita per ogni $x > 0$
- continua in $(0, \infty)$
- crescente in $(0, \infty)$.

Prime proprietà

Poiché $u \mapsto \frac{1}{u}$ è continua e positiva per ogni $u > 0$, la funzione $x \mapsto \log x$ è

- definita per ogni $x > 0$
- continua in $(0, \infty)$
- crescente in $(0, \infty)$.

Ovviamente

$$\log x > 0 \quad \forall x > 1,$$

$$\log 1 = 0,$$

$$\log x < 0 \quad \forall x \in (0, 1)\,.$$

Prime proprietà

Poiché $u \mapsto \frac{1}{u}$ è continua e positiva per ogni $u > 0$, la funzione $x \mapsto \log x$ è

- definita per ogni $x > 0$
- continua in $(0, \infty)$
- crescente in $(0, \infty)$.

Ovviamente

$$\log x > 0 \quad \forall x > 1,$$

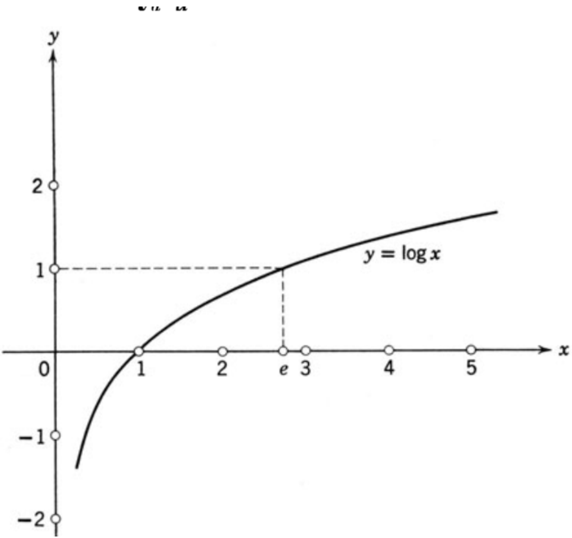
$$\log 1 = 0,$$

$$\log x < 0 \quad \forall x \in (0, 1)\,.$$

Inoltre, per qualunque $0 < a < b$,

$$\int_a^b \frac{1}{u} \mathrm{d}u = \log b - \log a\,.$$

Il grafico della funzione $x \mapsto \log x$ è il seguente:



Teorema sull'addizione

Teorema 3

Per ogni $x > 0, y > 0$,

$$\log(xy) = \log x + \log y\,.$$

Dimostrazione. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\log(xy) &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{xy} - 1) = \lim_{n\to\infty} \left[n\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} - n\sqrt[n]{y} + n\sqrt[n]{y} - n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[n(\sqrt[n]{x} - 1)\sqrt[n]{y} + n(\sqrt[n]{y} - 1)\right] \\
&= \left[\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)\right]\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y}\right) + \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{y} - 1) \\
&= \log x + \log y\,,
\end{aligned} \tag{5}$$

avendo sfruttato il fatto che $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y} = 1\,.$ $\square$

Dal Teorema 3, si ricavano le altre proprietà algebriche del logaritmo:

$$\log \frac{y}{x} = \log y - \log x \quad \forall x > o, y > 0,$$

$$\log \frac{1}{x} = -\log x \quad \forall x > 0,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha \log x \quad \forall x > 0, \alpha \in \mathbb{Q}, .$$

Logaritmo e numero di Nepero

Consideriamo il numero di Nepero definito come

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Logaritmo e numero di Nepero

Consideriamo il numero di Nepero definito come

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Teorema 4

Risulta

$$\log e = 1 .$$

Dimostrazione. Grazie alla continuità della funzione $x \mapsto \log x$,

$$\begin{aligned}\log e &= \log\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty}\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\int_1^{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{u}\mathrm{d}u .\end{aligned} \tag{6}$$

Grazie al teorema della media integrale, esiste $\eta_n \in \left(1, 1+\frac{1}{n}\right)$ tale che

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{u} \mathrm{d}u = \frac{1}{\eta_n} \frac{1}{n}.$$

Ovviamente $\eta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, quindi

$$\log e = \lim_{n\to+\infty} n \frac{1}{\eta_n} \frac{1}{n} = 1\,.$$

$\square$

Funzione inversa del logaritmo

Sia $y \in \mathbb{Q}$. Poiché $\log e = 1$,

$$y = y \log e = \log e^y .$$

Pertanto esiste $x > 0$, data da $x = e^y$, tale che

$$y = \log x . \tag{7}$$

Grazie alla continuità di $x \mapsto \log x$ ed alla densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, è possibile inferire che $\forall y \in \mathbb{R}$ l'equazione (7) ammette una unica soluzione $x > 0$. Dunque $x \mapsto \log x$ è una funzione suriettiva. Avevamo già osservato che è crescente, dunque iniettiva. Ne segue che è invertibile.

Dunque ammette la funzione inversa, che chiamiamo *funzione esponenziale*.

Dunque ammette la funzione inversa, che chiamiamo *funzione esponenziale*. Tale funzione

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$

è

- definita e positiva in $\mathbb{R}$
- crescente
- continua.

Dunque ammette la funzione inversa, che chiamiamo *funzione esponenziale*. Tale funzione

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$

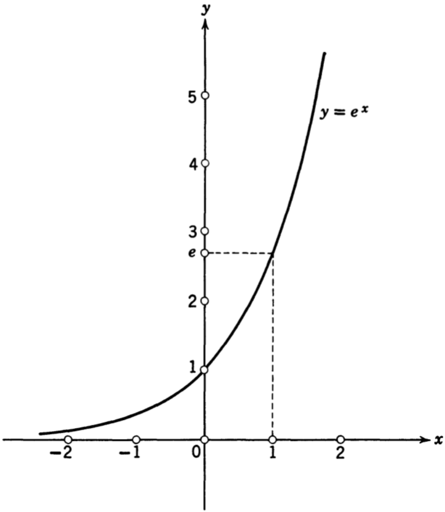
è

- definita e positiva in $\mathbb{R}$
- crescente
- continua.

Ovviamente

$$\exp(\log x) = e^{\log x} = x.$$

Il grafico della funzione $x \mapsto e^x$ è il seguente:



La funzione esponenziale come limite

Teorema 5

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Dimostrazione. Se facciamo vedere che

$$t_n := \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x,$$

poiché exp è continua, otteniamo che

$$e^{t_n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x.$$

Abbiamo che

$$t_n = n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = n \int_1^{1+\frac{x}{n}} \frac{1}{u}\mathrm{d}u.$$

Per il teorema della media integrale, esiste $\eta_n \in \left(1, 1 + \frac{x}{n}\right)$ tale che

$$t_n = n\frac{1}{\eta_n}\frac{x}{n} = \frac{x}{\eta_n}.$$

Abbiamo che

$$t_n = n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = n \int_1^{1+\frac{x}{n}} \frac{1}{u} \mathrm{d}u.$$

Per il teorema della media integrale, esiste $\eta_n \in \left(1, 1 + \frac{x}{n}\right)$ tale che

$$t_n = n \frac{1}{\eta_n} \frac{x}{n} = \frac{x}{\eta_n}.$$

Visto che $\eta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, deduciamo che

$$t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\,.$$

$\square$

Potenze ad esponente reale

Sappiamo che $\forall \alpha \in \mathbb{Q}, x > 0$

$$\log(x^\alpha) = \alpha \log x\,,$$

ossia

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x}\,.$$

Potenze ad esponente reale

Sappiamo che $\forall\alpha \in \mathbb{Q}, x > 0$

$$\log(x^\alpha) = \alpha \log x \,,$$

ossia

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x} \,.$$

Vogliamo dar senso all'espressione

$$x^\alpha \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \,.$$

Sia $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{Q}$ tale che $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$. Definiamo

$$x^\alpha := \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n}\,.$$

Osserviamo che tale limite esiste, infatti, per la continuità della funzione esponenziale,

$$\lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\alpha_n \log x} = e^{\lim_{n\to\infty} \alpha_n \log x} = e^{\alpha \log x}\,.$$

Logaritmo in base qualunque

Sia $a > 0, a \neq 1$. Per qualunque $x \in \mathbb{R}_+$ definiamo

$$\log_a x := \frac{\log x}{\log a} .$$

Logaritmo in base qualunque

Sia $a > 0, a \neq 1$. Per qualunque $x \in \mathbb{R}_+$ definiamo

$$\log_a x := \frac{\log x}{\log a}\,.$$

Poniamo $y = \log_a x$. Osserviamo che

$$y \log a = \log x \Rightarrow x = e^{y \log a}.$$

Logaritmo in base qualunque

Sia $a > 0, a \neq 1$. Per qualunque $x \in \mathbb{R}_+$ definiamo

$$\log_a x := \frac{\log x}{\log a}\,.$$

Poniamo $y = \log_a x$. Osserviamo che

$$y \log a = \log x \Rightarrow x = e^{y \log a}.$$

D'altra parte,

$$a^y = e^{y \log a}.$$

Logaritmo in base qualunque

Sia $a > 0, a \neq 1$. Per qualunque $x \in \mathbb{R}_+$ definiamo

$$\log_a x := \frac{\log x}{\log a}\,.$$

Poniamo $y = \log_a x$. Osserviamo che

$$y \log a = \log x \Rightarrow x = e^{y \log a}.$$

D'altra parte,

$$a^y = e^{y \log a}.$$

Conseguentemente

$$a^y = x.$$

Logaritmo in base qualunque

Sia $a > 0, a \neq 1$. Per qualunque $x \in \mathbb{R}_+$ definiamo

$$\log_a x := \frac{\log x}{\log a}.$$

Poniamo $y = \log_a x$. Osserviamo che

$$y \log a = \log x \Rightarrow x = e^{y \log a}.$$

D'altra parte,

$$a^y = e^{y \log a}.$$

Conseguentemente

$$a^y = x.$$

Ritroviamo così la definizione solitamente conosciuta,

Integrazione di x^α con $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$

Grazie alla formula vista per $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \neq -1$, ragionando per approssimazione (come poco sopra), si ricava che, per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$,

$$\int_a^b x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).$$

Bibliografia

- T. Apostol. *Calcolo. Volume primo. Analisi 1*, Bollati Boringhieri (1979).
- R. Courant, F. John, *Introduction to Calculus and Analysis 1*, Springer (1989).
- E. Hairer, G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer (2008)