

MATEMATICA E TOMOGRAFIA

Paolo Dulio
Politecnico di Milano

Seminario di cultura matematica

Prologo

I Problemi Inversi

Ricostruzione di soluzioni a partire da dati che, per quantità o per qualità, sono inadeguati alla descrizione completa del fenomeno considerato.

I Problemi Inversi

Ricostruzione di soluzioni a partire da dati che, per quantità o per qualità, sono inadeguati alla descrizione completa del fenomeno considerato.

Una questione connessa è quella di stabilire quando il problema è ben posto. In questo caso, più che la ricostruzione esplicita, interessa capire se la soluzione esiste, è unica e dipende con continuità dai dati iniziali

[condizioni di Hadamard] .

- Nacque a Tetschen, Boemia (attuale repubblica Ceca) il 16 dicembre 1887.

Johann Radon

- Nacque a Tetschen, Boemia (attuale repubblica Ceca) il 16 dicembre 1887.
- Nonostante problemi di salute (attacchi d'asma) ebbe un'ottima carriera scolastica.

- Nacque a Tetschen, Boemia (attuale repubblica Ceca) il 16 dicembre 1887.
- Nonostante problemi di salute (attacchi d'asma) ebbe un'ottima carriera scolastica.
- Oltre che matematico fu anche filosofo, cantante d'opera (ottimo baritono), stimato musicista (violino e liuto).

Johann Radon

- Nacque a Tetschen, Boemia (attuale repubblica Ceca) il 16 dicembre 1887.
- Nonostante problemi di salute (attacchi d'asma) ebbe un'ottima carriera scolastica.
- Oltre che matematico fu anche filosofo, cantante d'opera (ottimo baritono), stimato musicista (violino e liuto).
- Nel 1917 pubblica il lavoro (rimasto a lungo sconosciuto) che lo identifica come il padre della tomografia.

Johann Radon

- Nacque a Tetschen, Boemia (attuale repubblica Ceca) il 16 dicembre 1887.
- Nonostante problemi di salute (attacchi d'asma) ebbe un'ottima carriera scolastica.
- Oltre che matematico fu anche filosofo, cantante d'opera (ottimo baritono), stimato musicista (violino e liuto).
- Nel 1917 pubblica il lavoro (rimasto a lungo sconosciuto) che lo identifica come il padre della tomografia.

- Nacque a Tetschen, Boemia (attuale repubblica Ceca) il 16 dicembre 1887.
- Nonostante problemi di salute (attacchi d'asma) ebbe un'ottima carriera scolastica.
- Oltre che matematico fu anche filosofo, cantante d'opera (ottimo baritono), stimato musicista (violino e liuto).
- Nel 1917 pubblica il lavoro (rimasto a lungo sconosciuto) che lo identifica come il padre della tomografia.

Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Phys. Kl.* **69** (1917), 262-7

- Dopo aver insegnato a lungo all'Università di Vienna, nel 1919 venne chiamato ad Amburgo dall'amico Wilhelm Blaschke.

- Dopo aver insegnato a lungo all'Università di Vienna, nel 1919 venne chiamato ad Amburgo dall'amico Wilhelm Blaschke.
- Nel 1922 fu professore a Greifswald ed Erlangen, e nel 1928 si trasferì in Polonia, dove rimase fino al 1945, quando lui e la sua famiglia furono costretti a lasciare quasi ogni cosa per sfuggire all'esercito russo.

- Dopo aver insegnato a lungo all'Università di Vienna, nel 1919 venne chiamato ad Amburgo dall'amico Wilhelm Blaschke.
- Nel 1922 fu professore a Greifswald ed Erlangen, e nel 1928 si trasferì in Polonia, dove rimase fino al 1945, quando lui e la sua famiglia furono costretti a lasciare quasi ogni cosa per sfuggire all'esercito russo.
- Tornato a Vienna, accettò un incarico all'Università nel 1947, e divenne rettore nel 1954. Dal 1948 al 1950 fu presidente dell'Austrian Mathematical Society.

- Dopo aver insegnato a lungo all'Università di Vienna, nel 1919 venne chiamato ad Amburgo dall'amico Wilhelm Blaschke.
- Nel 1922 fu professore a Greifswald ed Erlangen, e nel 1928 si trasferì in Polonia, dove rimase fino al 1945, quando lui e la sua famiglia furono costretti a lasciare quasi ogni cosa per sfuggire all'esercito russo.
- Tornato a Vienna, accettò un incarico all'Università nel 1947, e divenne rettore nel 1954. Dal 1948 al 1950 fu presidente dell'Austrian Mathematical Society.
- **Morì il 25 maggio 1956 a Vienna**

Premio Nobel per la Medicina del 1979 Tomografia Assiale Computerizzata

(Lavori pubblicati tra il 1963 ed il 1973)



Allan MacLeod Cormack
Fisico nucleare (1924 - 1998)



Godfrey Newbold Hounsfield
Ingegnere (1919-2004)

- Il fisico nucleare Allan McLeod Cormack, della Tufts University, ricevette il premio Nobel per la medicina nel 1979, insieme all'ingegnere elettronico Godfrey Newbold Hounsfield, dell' EMI Central Research Laboratories, per i suoi studi riguardanti la tomografia computerizzata, che fornirono le basi teoriche per la nascita della moderna TAC.

- Il fisico nucleare Allan McLeod Cormack, della Tufts University, ricevette il premio Nobel per la medicina nel 1979, insieme all'ingegnere elettronico Godfrey Newbold Hounsfield, dell' EMI Central Research Laboratories, per i suoi studi riguardanti la tomografia computerizzata, che fornirono le basi teoriche per la nascita della moderna TAC.
- Egli racconta nelle sue memorie che ebbe le prime idee nel 1955, quando venne assegnato alla divisione di Radiologia dell'ospedale Groote Shuur di Città del Capo, ma solo nel 1969 seppe per caso dell'esistenza di una teoria che, prima di allora, non aveva ricevuto molta attenzione: la Trasformata di Radon.

- Il primo scanner, noto come EMI scanner, venne progettato da Godfrey Hounsfield per conto dell' EMI, la famosa compagnia britannica, con la quale aveva già collaborato alla realizzazione del primo computer a transistor, l'EMIDEC 1100. Questo tomografo, pur essendo un sistema estremamente innovativo, impiegava molte ore per acquisire i dati, e diversi giorni per produrre le immagini.

- Il primo scanner, noto come EMI scanner, venne progettato da Godfrey Hounsfield per conto dell' EMI, la famosa compagnia britannica, con la quale aveva già collaborato alla realizzazione del primo computer a transistor, l'EMIDEC 1100. Questo tomografo, pur essendo un sistema estremamente innovativo, impiegava molte ore per acquisire i dati, e diversi giorni per produrre le immagini.
- I miglioramenti progressivi nell'acquisizione delle immagini sono legati al potenziamento dei computers e delle tecnologie di rilevazione dei dati, oltre che al perfezionamento dei movimenti di scansione. I moderni multi-detectors possono completare una scansione del torace nel tempo necessario a trattenere un respiro, e produrre le immagini quasi in tempo reale, potendo elaborare un numero di sezioni che è passato, da circa una dozzina, a molte migliaia.

Tomografia Assiale Computerizzata

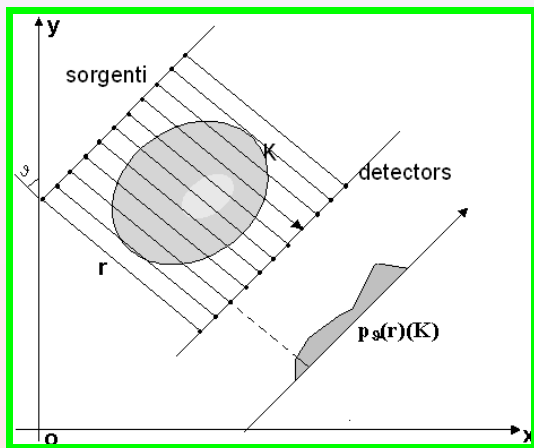


Schema sintetico di acquisizione dati

Sia K una sezione piana di C , di densità $f(x, y)$.

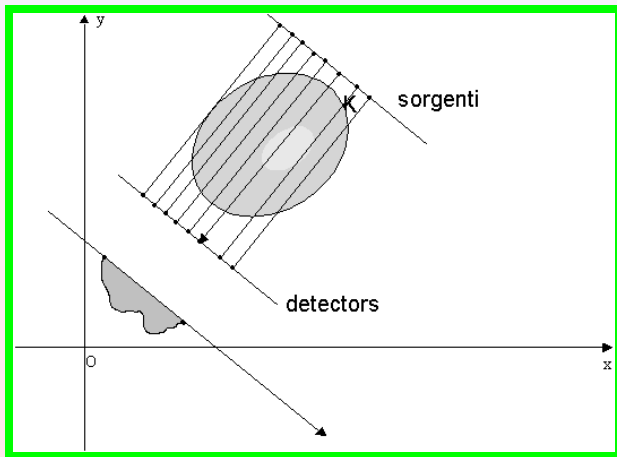
Schema sintetico di acquisizione dati

Sia K una sezione piana di C , di densità $f(x, y)$.



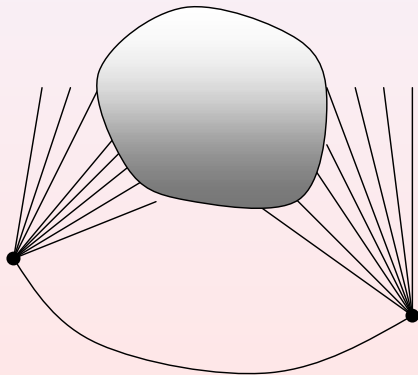
Schema sintetico di acquisizione dati

Sia K una sezione piana di C , di densità $f(x, y)$.



Osservazione

La TAC può essere eseguita anche sfruttando raggi X di tipo sorgente. In questo caso i fotoni vengono emessi a ventaglio da una sorgente puntiforme, la cui posizione può variare lungo opportune curve.



Trasformata di Radon.

$$\mathcal{R}(f(x, y)) = \{p_{\theta}(r), \theta \in S^1\}.$$

Trasformata di Radon.

$$\mathcal{R}(f(x, y)) = \{p_\theta(r), \theta \in \mathcal{S}^1\}.$$

Trasforma una funzione delle coordinate cartesiane (x, y) in una funzione delle coordinate polari (r, θ) .

Il problema principale della tomografia computerizzata consiste nello studio del problema inverso, cioè nella ricostruzione della funzione $f(x, y)$ a partire dalla famiglia di radiografie $\{p_\theta(r)\}$.

Il problema principale della tomografia computerizzata consiste nello studio del problema inverso, cioè nella ricostruzione della funzione $f(x, y)$ a partire dalla famiglia di radiografie $\{p_\theta(r)\}$.

$$f(x, y) = \mathcal{R}^{-1}\{p_\theta(r)\} =$$

Il problema principale della tomografia computerizzata consiste nello studio del problema inverso, cioè nella ricostruzione della funzione $f(x, y)$ a partire dalla famiglia di radiografie $\{p_\theta(r)\}$.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \mathcal{R}^{-1}\{p_\theta(r)\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x \cos \theta + y \sin \theta - r} \right) \frac{\partial p_\theta(r)}{\partial r} dr \right) d\theta \end{aligned}$$

[J.Radon, 1917].

Descrizione schematica del metodo di inversione

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ (densità incognita)

Descrizione schematica del metodo di inversione

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ (densità incognita)



Raggi X

Descrizione schematica del metodo di inversione

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ (densità incognita)



Raggi X



Trasformata di Radon

$\mathcal{R}(f(x, y)) = \{p_\theta(r), \theta \in [0, \pi)\}$ sinogramma

Descrizione schematica del metodo di inversione

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ (densità incognita)

↓

Raggi X

↓ **Trasformata di Radon**

$\mathcal{R}(f(x, y)) = \{p_\theta(r), \theta \in [0, \pi)\}$ sinogramma

↓ **Trasformata di Fourier**

$\tilde{p}_\theta(k) \rightarrow$

Descrizione schematica del metodo di inversione

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ (densità incognita)



Raggi X

↓ **Trasformata di Radon**

$\mathcal{R}(f(x, y)) = \{p_\theta(r), \theta \in [0, \pi)\}$ sinogramma

↓ **Trasformata di Fourier**

$\tilde{p}_\theta(k) \rightarrow$ **Fourier Slice Theorem** $\rightarrow \tilde{f}(r, \theta)$

Descrizione schematica del metodo di inversione

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ (densità incognita)



Raggi X

↓ **Trasformata di Radon**

$\mathcal{R}(f(x, y)) = \{p_\theta(r), \theta \in [0, \pi)\}$ sinogramma

↓ **Trasformata di Fourier**

$\tilde{p}_\theta(k) \rightarrow$ **Fourier Slice Theorem** $\rightarrow \tilde{f}(r, \theta)$
↓ interpolazioni

Descrizione schematica del metodo di inversione

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ (densità incognita)



Raggi X

↓ **Trasformata di Radon**

$\mathcal{R}(f(x, y)) = \{p_\theta(r), \theta \in [0, \pi)\}$ sinogramma

↓ **Trasformata di Fourier**

$\tilde{p}_\theta(k) \rightarrow$ **Fourier Slice Theorem** $\rightarrow \tilde{f}(r, \theta)$
↓ interpolazioni

$f(x, y) = \mathcal{R}^{-1}(p_\theta(r))$ **Trasformata di Fourier inversa** $\leftarrow \tilde{f}(x, y)$

↓
(densità ricostruita)

La natura di questo algoritmo è teorica per vari motivi.

- 1 Serve la conoscenza delle radiografie lungo tutte le direzioni del piano.

La natura di questo algoritmo è teorica per vari motivi.

- 1 Serve la conoscenza delle radiografie lungo tutte le direzioni del piano.
- 2 È necessario avere una buona struttura geometrica (cioè la densità $f(x, y)$ deve aver una opportuna regolarità).

La natura di questo algoritmo è teorica per vari motivi.

- 1 Serve la conoscenza delle radiografie lungo tutte le direzioni del piano.
- 2 È necessario avere una buona struttura geometrica (cioè la densità $f(x, y)$ deve aver una opportuna regolarità).
- 3 I raggi X sono fasci rettilinei continui di fotoni.

- 1 I raggi X vengono emessi da sorgenti prive di dimensioni, che occupano i punti di una curva opportuna. Lo stesso vale per i detectors, adibiti alla raccolta dei raggi X trasmessi.

- 1 I raggi X vengono emessi da sorgenti prive di dimensioni, che occupano i punti di una curva opportuna. Lo stesso vale per i detectors, adibiti alla raccolta dei raggi X trasmessi.
- 2 L'emissione di raggi X da parte delle sorgenti non è soggetta ad attenuazioni o variazioni energetiche di alcun tipo.

- 1 I raggi X vengono emessi da sorgenti prive di dimensioni, che occupano i punti di una curva opportuna. Lo stesso vale per i detectors, adibiti alla raccolta dei raggi X trasmessi.
- 2 L'emissione di raggi X da parte delle sorgenti non è soggetta ad attenuazioni o variazioni energetiche di alcun tipo.
- 3 La raccolta e la rielaborazione dei dati dovrebbe avvenire in maniera analogica esatta, mentre la ricostruzione dell'immagine richiede una discretizzazione ed una interpolazione dei dati.

Discretizzazione dell'algoritmo di inversione

- N proiezioni, uniformemente distribuite nell'arco di 180° , con $\Delta\theta = \frac{\pi}{N}$.

Discretizzazione dell'algoritmo di inversione

- N proiezioni, uniformemente distribuite nell'arco di 180° , con $\Delta\theta = \frac{\pi}{N}$.
- M sorgenti, M detectors, con passo di campionamento d .

Discretizzazione dell'algoritmo di inversione

- N proiezioni, uniformemente distribuite nell'arco di 180° , con $\Delta\theta = \frac{\pi}{N}$.
- M sorgenti, M detectors, con passo di campionamento d .
- Rotazione della sorgente intorno al paziente.

Discretizzazione dell'algoritmo di inversione

- N proiezioni, uniformemente distribuite nell'arco di 180° , con $\Delta\theta = \frac{\pi}{N}$.
- M sorgenti, M detectors, con passo di campionamento d .
- Rotazione della sorgente intorno al paziente.
- **Uso della DFT delle proiezioni e campionamento in coordinate polari.**

Discretizzazione dell'algoritmo di inversione

- N proiezioni, uniformemente distribuite nell'arco di 180° , con $\Delta\theta = \frac{\pi}{N}$.
- M sorgenti, M detectors, con passo di campionamento d .
- Rotazione della sorgente intorno al paziente.
- Uso della DFT delle proiezioni e campionamento in coordinate polari.
- Ricampionamento da coordinate polari a coordinate cartesiane (effetti di disturbo causati da interpolazione).

Discretizzazione dell'algoritmo di inversione

- N proiezioni, uniformemente distribuite nell'arco di 180° , con $\Delta\theta = \frac{\pi}{N}$.
- M sorgenti, M detectors, con passo di campionamento d .
- Rotazione della sorgente intorno al paziente.
- Uso della DFT delle proiezioni e campionamento in coordinate polari.
- Ricampionamento da coordinate polari a coordinate cartesiane (effetti di disturbo causati da interpolazione).
- Il dominio di $f(x, y)$ diventa una griglia cartesiana di pixels, e la densità viene considerata costante all'interno di ogni pixel.

Discretizzazione dell'algoritmo di inversione

- Elaborazione computerizzata dei dati. Ad ogni pixel corrisponde una tonalità di grigio dipendente della densità radiografica del tessuto ad esso associato, su una scala Hounsfield (HU) da -1024 HU a $+3071$ HU.

Discretizzazione dell'algoritmo di inversione

- Elaborazione computerizzata dei dati. Ad ogni pixel corrisponde una tonalità di grigio dipendente della densità radiografica del tessuto ad esso associato, su una scala Hounsfield (HU) da -1024 HU a $+3071$ HU.
- L'acqua ha una attenuazione di 0 HU, l'aria di -1000 HU, un osso tipico di $+400$ HU o più, e strutture metalliche sono di solito di $+1000$ HU.

Discretizzazione dell'algoritmo di inversione

- Elaborazione computerizzata dei dati. Ad ogni pixel corrisponde una tonalità di grigio dipendente della densità radiografica del tessuto ad esso associato, su una scala Hounsfield (HU) da -1024 HU a $+3071$ HU.
- L'acqua ha una attenuazione di 0 HU, l'aria di -1000 HU, un osso tipico di $+400$ HU o più, e strutture metalliche sono di solito di $+1000$ HU.
- Dopo aver eseguito un numero sufficiente di misure si procede con interpolazioni numeriche che consentono la ricostruzione volumetrica tridimensionale.

Discretizzazione dell'algoritmo di inversione

- Elaborazione computerizzata dei dati. Ad ogni pixel corrisponde una tonalità di grigio dipendente della densità radiografica del tessuto ad esso associato, su una scala Hounsfield (HU) da -1024 HU a $+3071$ HU.
- L'acqua ha una attenuazione di 0 HU, l'aria di -1000 HU, un osso tipico di $+400$ HU o più, e strutture metalliche sono di solito di $+1000$ HU.
- Dopo aver eseguito un numero sufficiente di misure si procede con interpolazioni numeriche che consentono la ricostruzione volumetrica tridimensionale.
- A volte si iniettano materiali di contrasto, per evitare che certe strutture, come i vasi sanguigni, vengano confuse con ciò che li circonda.

Gli interventi di interpolazione producono fenomeni di disturbo che si traducono in effetti di annebbiamento dell'immagine reale.

Gli interventi di interpolazione producono fenomeni di disturbo che si traducono in effetti di annebbiamento dell'immagine reale.

Per rimuovere questi offuscamenti bisogna procedere con opportune azioni di filtraggio.

Gli interventi di interpolazione producono fenomeni di disturbo che si traducono in effetti di annebbiamento dell'immagine reale.

Per rimuovere questi offuscamenti bisogna procedere con opportune azioni di filtraggio.

Entriamo allora in un settore più propriamente connesso alla ricostruzione di immagini.

A questo punto il sentiero si biforca, consentendo di proseguire in due maniere distinte.

A questo punto il sentiero si biforca, consentendo di proseguire in due maniere distinte.

- La via applicativa consiste nella ricerca di opportuni algoritmi che consentano di perfezionare l'implementazione della trasformata di Radon inversa.

A questo punto il sentiero si biforca, consentendo di proseguire in due maniere distinte.

- La via applicativa consiste nella ricerca di opportuni algoritmi che consentano di perfezionare l'implementazione della trasformata di Radon inversa.
- Un percorso di natura più matematica consiste nella selezione di opportune famiglie di oggetti geometrici, che possano essere studiati mediante un numero finito di radiografie.

Quando si lavora con oggetti geometrici, anziché con una densità, si parla più propriamente di **Tomografia Geometrica**.

Quando si lavora con oggetti geometrici, anziché con una densità, si parla più propriamente di **Tomografia Geometrica**.

La sua nascita può essere fatta risalire alla formulazione del seguente problema.

Quando si lavora con oggetti geometrici, anziché con una densità, si parla più propriamente di **Tomografia Geometrica**.

La sua nascita può essere fatta risalire alla formulazione del seguente problema.

Problema di Hammer

Supponiamo che esista una cavità convessa all'interno di un solido omogeneo. Stabilire il minimo numero di radiografie necessarie per ottenere l'esatta ricostruzione del corpo. [P.C.Hammer, 1961].

Più in generale possiamo formulare il seguente problema.

Più in generale possiamo formulare il seguente problema.

Problema di unicità

Sia \mathcal{F} una data famiglia di insiemi di uno spazio Y . Stabilire (se esiste) il minimo numero di radiografie necessarie a distinguere due insiemi qualsiasi $I_1, I_2 \in \mathcal{F}$.

Più in generale possiamo formulare il seguente problema.

Problema di unicità

Sia \mathcal{F} una data famiglia di insiemi di uno spazio Y . Stabilire (se esiste) il minimo numero di radiografie necessarie a distinguere due insiemi qualsiasi $I_1, I_2 \in \mathcal{F}$.

① \mathcal{F} =convessi, stellati, poliomini, insiemi discreti, grafi.

Più in generale possiamo formulare il seguente problema.

Problema di unicità

Sia \mathcal{F} una data famiglia di insiemi di uno spazio Y . Stabilire (se esiste) il minimo numero di radiografie necessarie a distinguere due insiemi qualsiasi $I_1, I_2 \in \mathcal{F}$.

- 1 \mathcal{F} =convessi, stellati, poliomini, insiemi discreti, grafi.
- 2 $Y = \mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n, \mathbb{Z}^n$

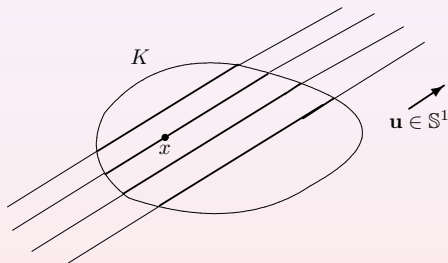
Più in generale possiamo formulare il seguente problema.

Problema di unicità

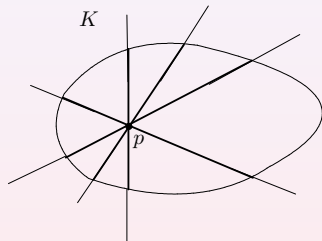
Sia \mathcal{F} una data famiglia di insiemi di uno spazio Y . Stabilire (se esiste) il minimo numero di radiografie necessarie a distinguere due insiemi qualsiasi $I_1, I_2 \in \mathcal{F}$.

- 1 \mathcal{F} =convessi, stellati, poliomini, insiemi discreti, grafi.
- 2 $Y = \mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n, \mathbb{Z}^n$
- 3 **Raggi X: paralleli o sorgenti**

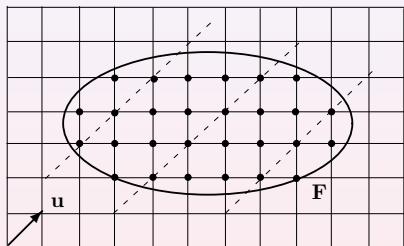
Tomografia Geometrica-Raggi X paralleli in \mathbb{R}^n



$$X_u K(x) = \lambda_1(K \cap L(x, u)) \quad \lambda_1 \text{ a.a. } x \in u^\perp.$$

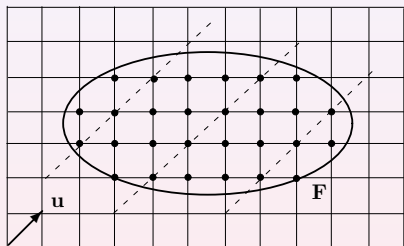


$$X_p K(u) = \lambda_1(K \cap L(p, u)) \quad \lambda_1 \text{ a.a. } u \in S^1.$$

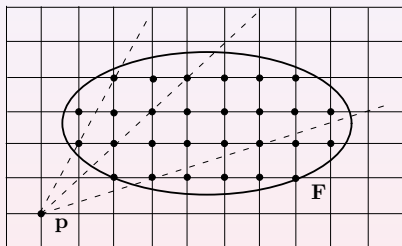


Raggi X paralleli = numero di punti dell'insieme appartenenti alle rette parallele ad \mathbf{u} .

Tomografia Geometrica-Raggi X in \mathbb{Z}^n



Raggi X paralleli= numero di punti dell'insieme appartenenti alle rette parallele ad u .



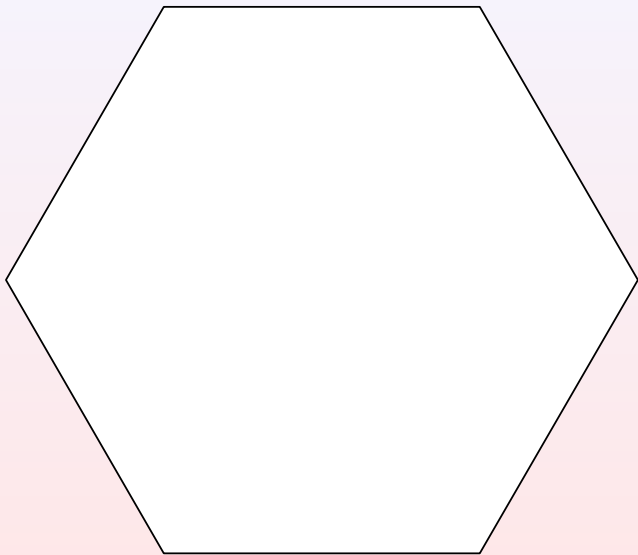
Raggi X sorgenti= numero di punti dell'insieme appartenenti alle rette passanti per p .

Consideriamo la seguente costruzione.

Consideriamo la seguente costruzione.

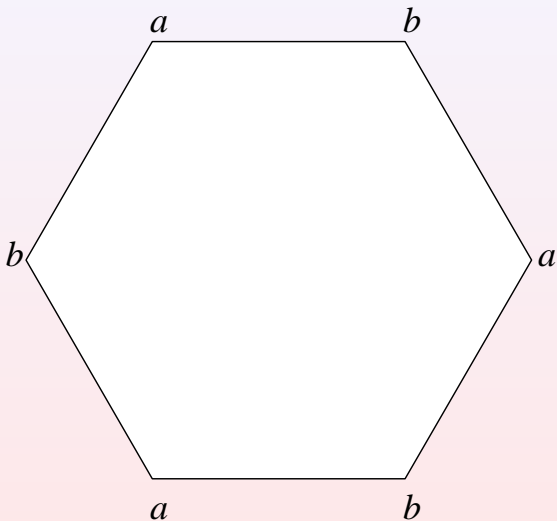
- Fissiamo un qualsiasi intero n , e sia \mathcal{R} un poligono regolare con $2n$ lati.

Radiografie di convessi con raggi X paralleli.



- Etichettiamo i vertici di \mathcal{R} , alternativamente, con le lettere a e b , in maniera da ottenere due insiemi, A e B , rispettivamente, ognuno dotato di n etichette.

Radiografie di convessi con raggi X paralleli.

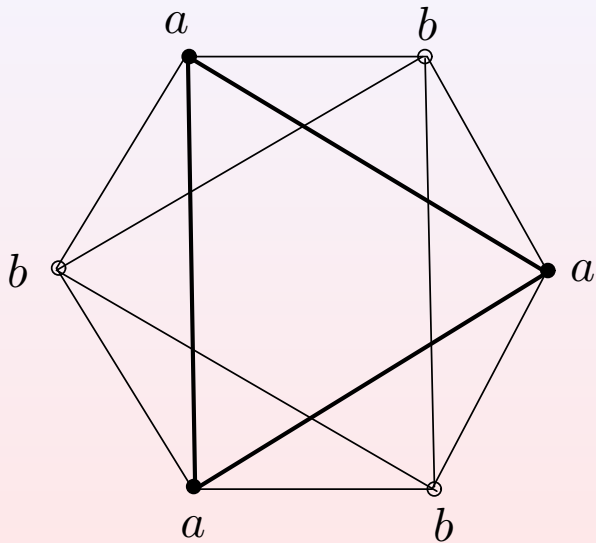


- Consideriamo i due poligoni regolari di n lati, \mathcal{R}_A ed \mathcal{R}_B , aventi come vertici gli elementi di A e B , rispettivamente.

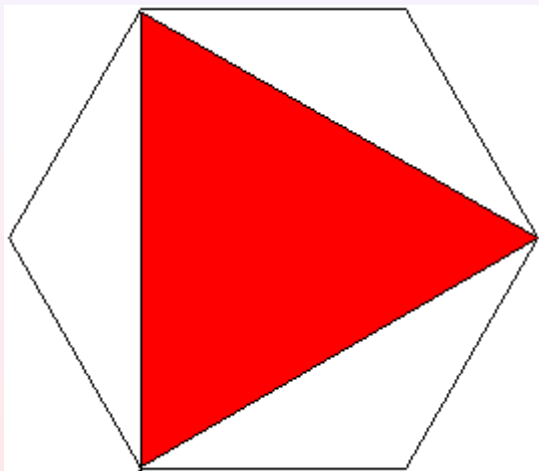
- Consideriamo i due poligoni regolari di n lati, \mathcal{R}_A ed \mathcal{R}_B , aventi come vertici gli elementi di A e B , rispettivamente.

I poligoni \mathcal{R}_A ed \mathcal{R}_B così ottenuti hanno uguali raggi X lungo tutte le n direzioni dei lati del poligono \mathcal{R} .

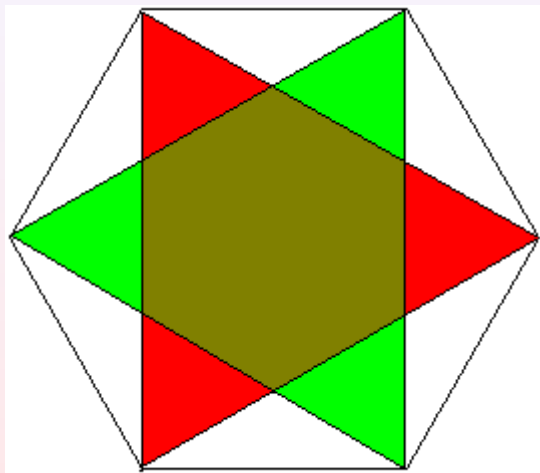
Radiografie di convessi con raggi X paralleli.



Radiografie di convessi con raggi X paralleli.



Radiografie di convessi con raggi X paralleli.



Esistono anche costruzioni più generali, nelle quali gli insiemi tomograficamente equivalenti non sono congruenti tra loro.

Esistono anche costruzioni più generali, nelle quali gli insiemi tomograficamente equivalenti non sono congruenti tra loro.

Si deduce che, in generale, il problema di unicità per raggi X paralleli non ha soluzione nella classe \mathcal{K} dei corpi convessi.

Radiografie di convessi con raggi X paralleli.

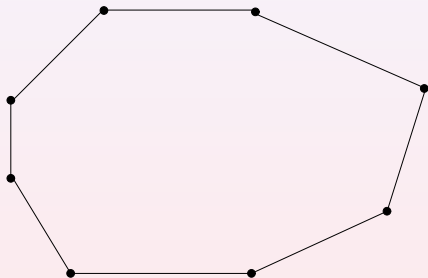
Esistono anche costruzioni più generali, nelle quali gli insiemi tomograficamente equivalenti non sono congruenti tra loro.

Si deduce che, in generale, il problema di unicità per raggi X paralleli non ha soluzione nella classe \mathcal{K} dei corpi convessi. Si può allora vedere se, introducendo particolari criteri nella scelta delle direzioni, si possano conseguire risultati di unicità per corpi convessi.

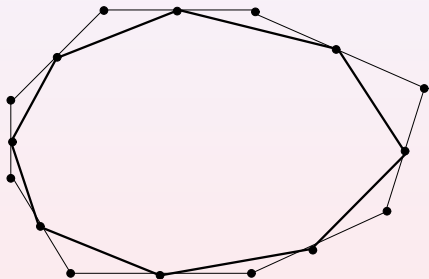
La mid-point construction

È una particolare costruzione geometrica che consente di trasformare un qualsiasi poligono convesso in un poligono affinementemente regolare.

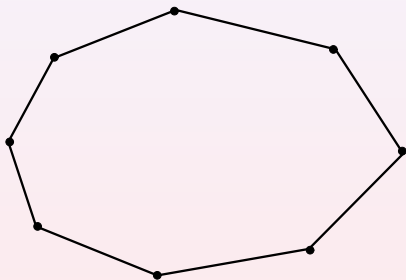
Mid-point construction



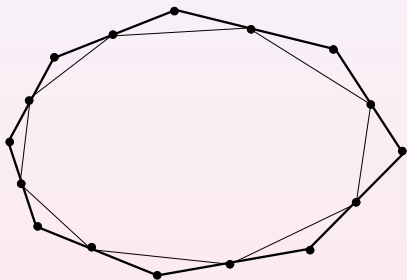
Mid-point construction



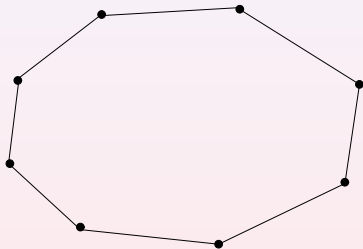
Mid-point construction



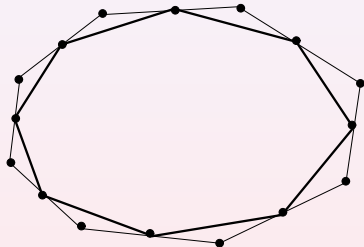
Mid-point construction



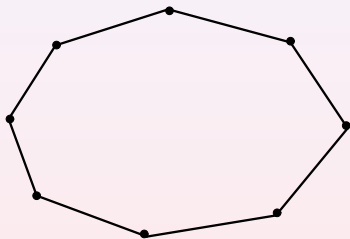
Mid-point construction



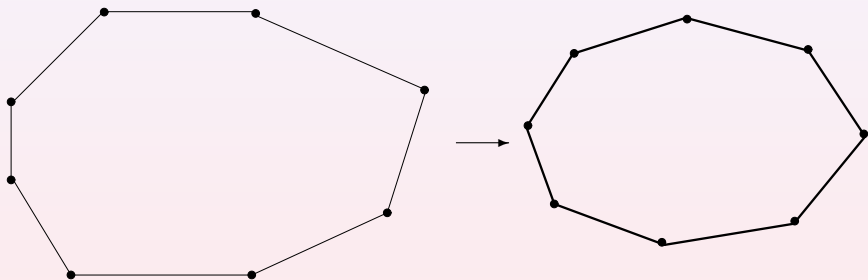
Mid-point construction



Mid-point construction



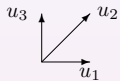
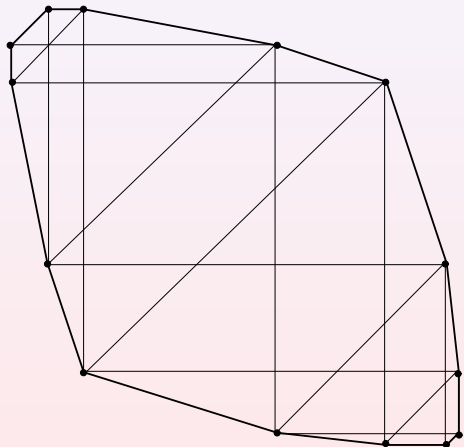
Mid-point construction



Gli U -poligoni.

Sia U un insieme finito di direzioni. Un poligono convesso P è un U -poligono se, per ogni vertice $v \in P$ e per ogni direzione $\mathbf{u} \in U$, la retta passante per v ed avente direzione \mathbf{u} incontra un vertice $v' \in P$ diverso da v .

U-Poligoni



Analisi delle componenti della differenza simmetrica.

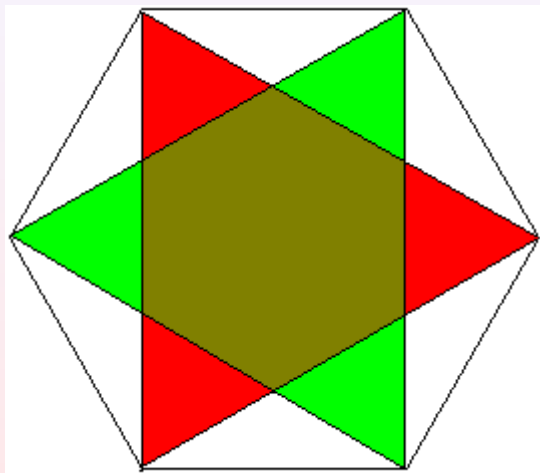
Se due corpi convessi hanno gli stessi raggi X in un dato insieme di direzioni, allora le componenti connesse della loro differenza simmetrica possiedono la stessa proprietà.

Analisi delle componenti della differenza simmetrica.

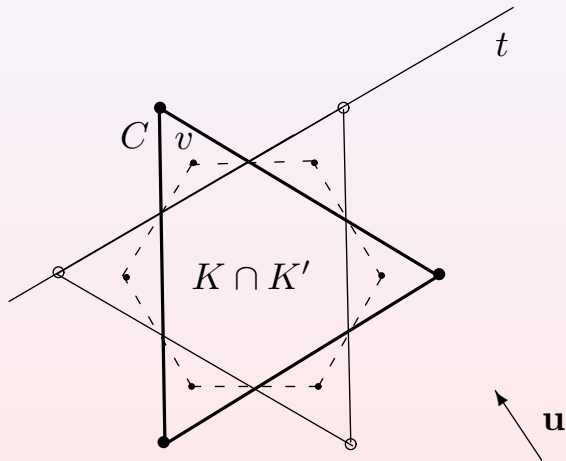
Se due corpi convessi hanno gli stessi raggi X in un dato insieme di direzioni, allora le componenti connesse della loro differenza simmetrica possiedono la stessa proprietà.

Si passa quindi allo studio dell'insieme di tali componenti.

Radiografie di convessi con raggi X paralleli.



U-Poligoni



- Uso dell mid-point construction sugli U -poligoni.

- Uso dell mid-point construction sugli U -poligoni.
- Studio dei birapporti nei poligoni regolari.

Radiografie di convessi con raggi X paralleli.

- Uso dell mid-point construction sugli U -poligoni.
- Studio dei birapporti nei poligoni regolari.

- Uso dell mid-point construction sugli U -poligoni.
- Studio dei birapporti nei poligoni regolari. \rightarrow valori algebrici.

Risultati di unicità

Risultati di unicità

- $n_0 = 4$ in \mathbb{R}^2 con birapporto trascendente.
[R.Gardner-P.McMullen, 1980].

Risultati di unicità

- $n_0 = 4$ in \mathbb{R}^2 con birapporto trascendente.
[R.Gardner-P.McMullen, 1980].
- Senza condizioni non è possibile garantire l'esistenza di un minimo.

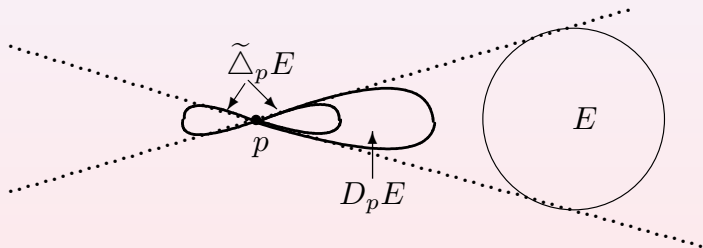
Risultati di unicità

- $n_0 = 4$ in \mathbb{R}^2 con birapporto trascendente.
[R.Gardner-P.McMullen, 1980].
- Senza condizioni non è possibile garantire l'esistenza di un minimo.
- $n_0 = 7$ in \mathbb{Z}^2 ($n_0 = 4$ se il birapporto è diverso da 2, 3, 4)
[R.Gardner-P.Gritzmann, 1997].

Si vede facilmente che una sola sorgente non è mai sufficiente a garantire l'unicità.

Radiografie di convessi con raggi X sorgenti.

Si vede facilmente che una sola sorgente non è mai sufficiente a garantire l'unicità.



Radiografie di convessi con raggi X sorgenti.

A differenza di ciò che accade con raggi X paralleli, risulta ora determinante la posizione che assumono le sorgenti rispetto al corpo che si considera.

Radiografie di convessi con raggi X sorgenti.

A differenza di ciò che accade con raggi X paralleli, risulta ora determinante la posizione che assumono le sorgenti rispetto al corpo che si considera.

Infatti, se lavoriamo con $n > 2$ sorgenti, può succedere che queste non siano tutte allineate, mentre i raggi X paralleli possono essere considerati come un caso particolare di raggi X sorgente, quando si ha allineamento sulla retta impropria.

Radiografie di convessi con raggi X sorgenti.

A differenza di ciò che accade con raggi X paralleli, risulta ora determinante la posizione che assumono le sorgenti rispetto al corpo che si considera.

Infatti, se lavoriamo con $n > 2$ sorgenti, può succedere che queste non siano tutte allineate, mentre i raggi X paralleli possono essere considerati come un caso particolare di raggi X sorgente, quando si ha allineamento sulla retta impropria.

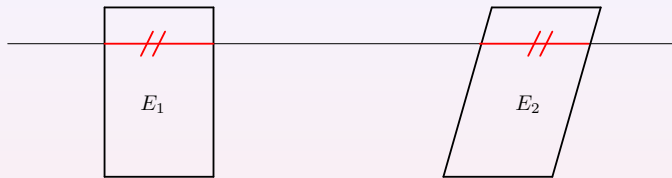
Questo, da un lato permette di ottenere teoremi di unicità già con 2 sole sorgenti, ma dall'altro consente nuove costruzioni che lasciano aperti vari problemi, sia in \mathbb{E}^2 che in \mathbb{Z}^2 , dove si hanno anche problemi di natura numerica.

Il Principio di Cavalieri non vale per raggi X sorgente.

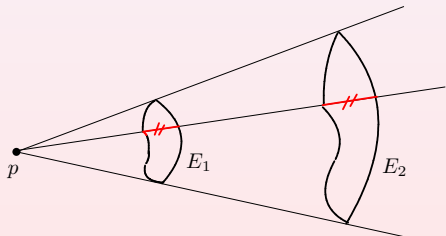
Il Principio di Cavalieri non vale per raggi X sorgente.
Per esempio l'area cresce al crescere della distanza dalle sorgenti.

Il Principio di Cavalieri non vale per raggi X sorgente.
Per esempio l'area cresce al crescere della distanza dalle sorgenti.
Questo suggerisce l'introduzione di nuove misure, diverse dalla misura di Lebesgue.

Radiografie di convessi con raggi X sorgenti.



$$\lambda_2(E_1) = \lambda_2(E_2)$$



$$\nu_1(E_1) = \nu_1(E_2)$$

Misure cordali

In effetti si possono introdurre infinite misure utili ν_i , una per ogni $i \in \mathbb{R}$, date da

$$\nu_i(E) = \iint_E |y|^{i-2} dx dy.$$

Principali proprietà delle misure cordali.

- $X_p(E_1) = X_p(E_2) \Rightarrow \nu_1(E_1) = \nu_1(E_2).$

Principali proprietà delle misure cordali.

- $X_{\mathbf{p}}(E_1) = X_{\mathbf{p}}(E_2) \Rightarrow \nu_1(E_1) = \nu_1(E_2)$.
- $X_{\mathbf{p}}(E_1) = X_{\mathbf{p}}(E_2)$ e $\mathbf{p} = (x_0, 0)$ implica $\mathbf{p}, c_{\nu_0}(E_1), c_{\nu_0}(E_2)$ allineati.

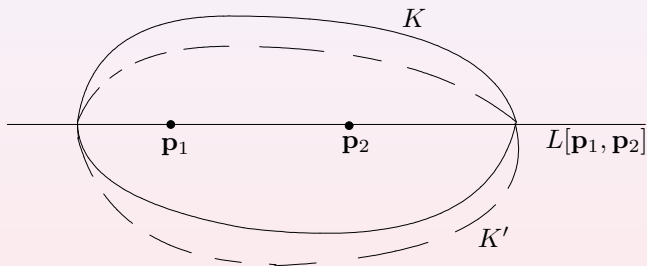
Principali proprietà delle misure cordali.

- $X_{\mathbf{p}}(E_1) = X_{\mathbf{p}}(E_2) \Rightarrow \nu_1(E_1) = \nu_1(E_2)$.
- $X_{\mathbf{p}}(E_1) = X_{\mathbf{p}}(E_2)$ e $\mathbf{p} = (x_0, 0)$ implica $\mathbf{p}, c_{\nu_0}(E_1), c_{\nu_0}(E_2)$ allineati.
- E_1, E_2 stellati in \mathbf{p} , $X_{\mathbf{p}}(E_1) = X_{\mathbf{p}}(E_2)$, $\mathbf{p} = (x_0, 0)$ implica ν_k , $k \geq 2$ cresce al crescere della distanza degli insiemi da \mathbf{p} .
Se $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ allora ν_1 cresce per $y_0 > 0$, decresce per $y_0 < 0$.

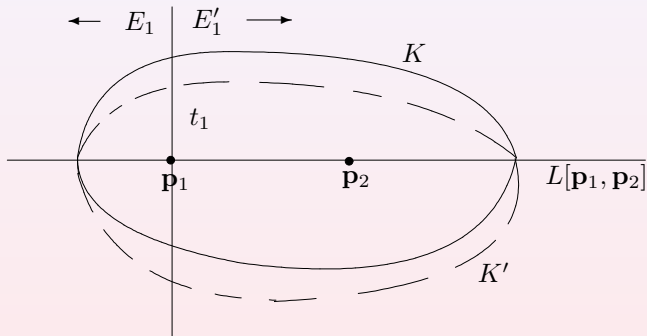
Due sorgenti

Due sorgenti sono sufficienti a distinguere tomograficamente i corpi convessi che contengono le sorgenti.

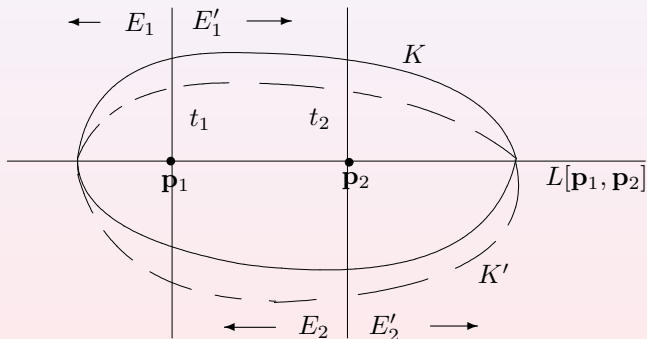
Radiografie di convessi con raggi X sorgenti.



Radiografie di convessi con raggi X sorgenti.



Radiografie di convessi con raggi X sorgenti.

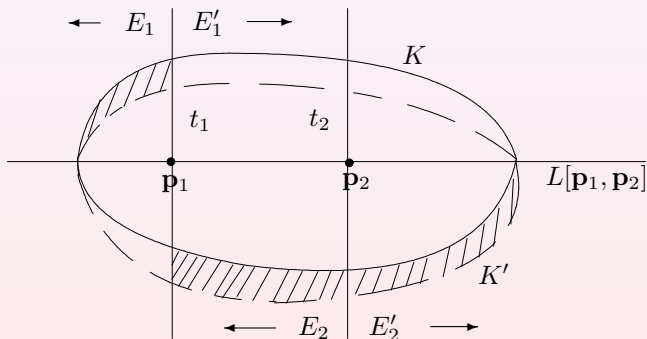


Radiografie di convessi con raggi X sorgenti.

Siano C e C' le componenti della differenza simmetrica dei due convessi.

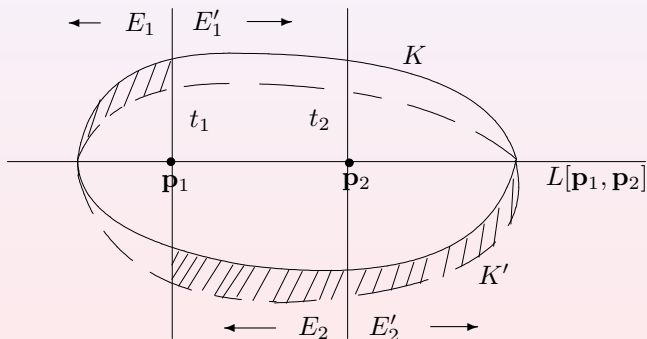
Radiografie di convessi con raggi X sorgenti.

Siano C e C' le componenti della differenza simmetrica dei due convessi.



Radiografie di convessi con raggi X sorgenti.

Siano C e C' le componenti della differenza simmetrica dei due convessi.

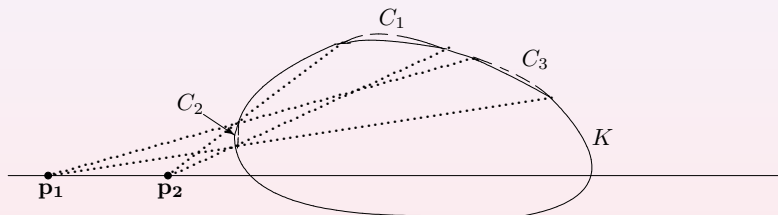


$$\nu_1(E_1 \cap C) < \nu_1(E_2 \cap C) = \nu_1(E_2' \cap C') < \nu_1(E_1' \cap C'),$$

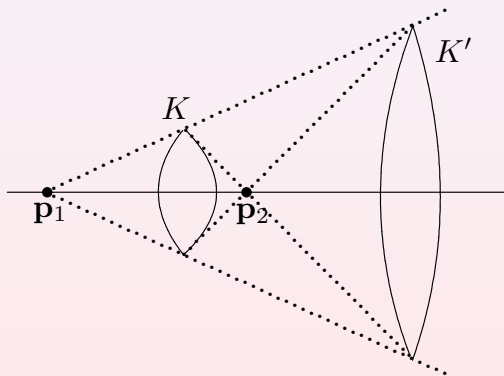
Due sorgenti

Due sorgenti sono sufficienti anche in altri casi più generali, ma restano problemi aperti [K.J. Falconer, 1983] ed indipendentemente [R. Gardner, 1983].

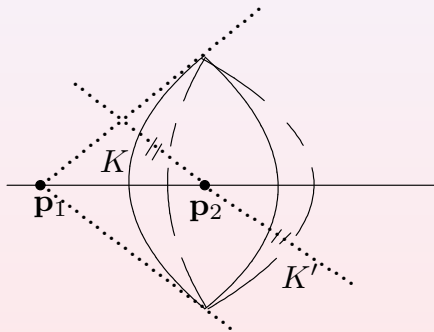
Radiografie di convessi con raggi X sorgenti.



Problema aperto.



Problema aperto.



Radiografie di convessi con raggi X sorgenti.

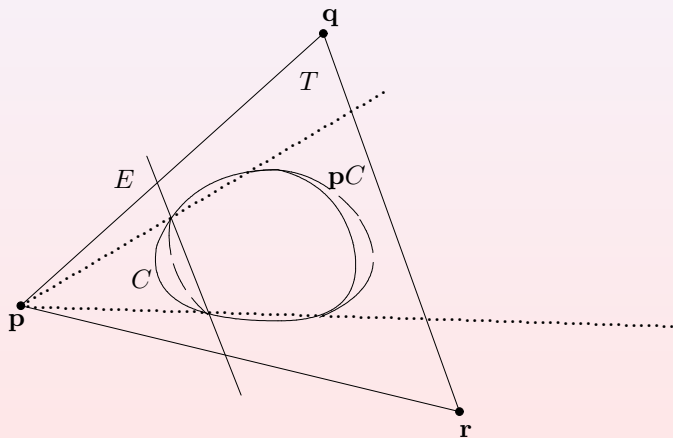
Tre sorgenti

Tre sorgenti sono sufficienti a distinguere i corpi convessi interni al triangolo da esse descritto [A. Volčič, 1986].

Radiografie di convessi con raggi X sorgenti.

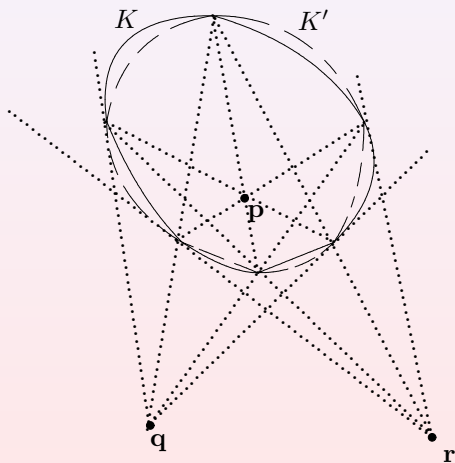
Tre sorgenti

Tre sorgenti sono sufficienti a distinguere i corpi convessi interni al triangolo da esse descritto [A. Volčič, 1986].



Radiografie di convessi con raggi X sorgenti.

Problema aperto.



Quattro sorgenti

Quattro sorgenti, a tre a tre non allineate, sono sufficienti a distinguere tomograficamente due qualsiasi corpi convessi

[A. Volčič, 1986].

Generalizzazioni ad altri spazi

- $n_0 = 4$ in S^2 ed \mathbb{H}^2 [P.D.-C.Peri, 2006].

Generalizzazioni ad altri spazi

- $n_0 = 4$ in \mathbb{S}^2 ed \mathbb{H}^2 [P.D.-C.Peri, 2006].
- $n_0 = 3$ per le lune sferiche (intersezioni di semisfere distinte) [P.D.-C.Peri, 2006].

Generalizzazioni ad altri spazi

- $n_0 = 4$ in \mathbb{S}^2 ed \mathbb{H}^2 [P.D.-C.Peri, 2006].
- $n_0 = 3$ per le lune sferiche (intersezioni di semisfere distinte) [P.D.-C.Peri, 2006].
- $n_0 = 2$ per sorgenti interne (localmente anche in curvatura non costante). Conseguenza: caratterizzazione della centro simmetria di un convesso in spazi n -dimensionali a curvatura costante. [P.D.-C.Peri, 2002].

Generalizzazioni ad altri spazi

- $n_0 = 4$ in \mathbb{S}^2 ed \mathbb{H}^2 [P.D.-C.Peri, 2006].
- $n_0 = 3$ per le lune sferiche (intersezioni di semisfere distinte) [P.D.-C.Peri, 2006].
- $n_0 = 2$ per sorgenti interne (localmente anche in curvatura non costante). Conseguenza: caratterizzazione della centro simmetria di un convesso in spazi n -dimensionali a curvatura costante. [P.D.-C.Peri, 2002].
- In \mathbb{Z}^2 risulta $n_0 = 7$ per sorgenti allineate ($n_0 = 4$ con birapporto diverso da 2, 3, 4), $n_0 \geq 7$ in generale. [P.D.-R.Gardner e C.Peri, 2006]

Nel reticolo il teorema di Volčič non è più valido, poiché esistono convessi dotati di uguali raggi X da 4 sorgenti a tre a tre non allineate

Strumenti numerici principali utilizzati

- Si usa ancora la misura del conteggio.

Strumenti numerici principali utilizzati

- Si usa ancora la misura del conteggio.
- **Uso di valutazioni p -adiche.**

Strumenti numerici principali utilizzati

- Si usa ancora la misura del conteggio.
- Uso di valutazioni p -adiche.
- **Teorema cinese del resto e sue conseguenze.**

Strumenti numerici principali utilizzati

- Si usa ancora la misura del conteggio.
- Uso di valutazioni p -adiche.
- Teorema cinese del resto e sue conseguenze.
- **Progressioni di numeri primi.**

Strumenti numerici principali utilizzati

- Si usa ancora la misura del conteggio.
- Uso di valutazioni p -adiche.
- Teorema cinese del resto e sue conseguenze.
- Progressioni di numeri primi.
- **Progressioni di numeri relativamente primi tra loro.**

Strumenti geometrici principali utilizzati.

- Invarianza del birapporto per proiezioni e sezioni.

Strumenti geometrici principali utilizzati.

- Invarianza del birapporto per proiezioni e sezioni.
- **Teoremi di Pappo-Pascal.**

Strumenti geometrici principali utilizzati.

- Invarianza del birapporto per proiezioni e sezioni.
- Teoremi di Pappo-Pascal.
- **Configurazioni di Desargues.**

Strumenti geometrici principali utilizzati.

- Invarianza del birapporto per proiezioni e sezioni.
- Teoremi di Pappo-Pascal.
- Configurazioni di Desargues.
- **Proprietà dei triangoli omologici e altre proprietà di geometria proiettiva**