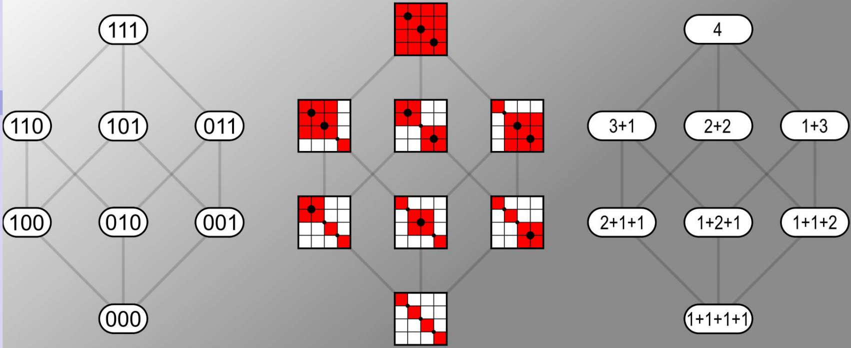


Impariamo a contare: introduzione all'analisi combinatoria

Fabio Zucca

9 febbraio 2022 - Seminario FDS

Cos'hanno in comune?

1. i sottoinsiemi di 2 elementi di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. i sottoinsiemi di 3 elementi di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
3. le sequenze di lunghezza 5 con due A e tre 0
4. i percorsi da $(0, 0)$ a $(3, 2)$ in cui si può andare solo verso destra o verso l'alto?

Cos'hanno in comune?

1. i sottoinsiemi di 2 elementi di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. i sottoinsiemi di 3 elementi di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
3. le sequenze di lunghezza 5 con due A e tre 0
4. i percorsi da $(0, 0)$ a $(3, 2)$ in cui si può andare solo verso destra o verso l'alto?

Cos'hanno in comune?

1. i sottoinsiemi di 2 elementi di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. i sottoinsiemi di 3 elementi di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
3. le sequenze di lunghezza 5 con due A e tre 0
4. i percorsi da $(0, 0)$ a $(3, 2)$ in cui si può andare solo verso destra o verso l'alto?

Cos'hanno in comune?

1. i sottoinsiemi di 2 elementi di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. i sottoinsiemi di 3 elementi di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
3. le sequenze di lunghezza 5 con due A e tre 0
4. i percorsi da $(0, 0)$ a $(3, 2)$ in cui si può andare solo verso destra o verso l'alto?

$$\{1, 2\}$$

$$\{1, 3\}$$

$$\{1, 4\}$$

$$\{1, 5\}$$

$$\{2, 3\}$$

$$\{2, 4\}$$

$$\{2, 5\}$$

$$\{3, 4\}$$

$$\{3, 5\}$$

$$\{4, 5\}$$

$$\{1,2,3,4,5\}$$

$\{1,2\} \to (A, A, 0, 0, 0)$

$\{1,3\}$

$\{1,4\}$

$\{1,5\}$

$\{2,3\}$

$\{2,4\}$

$\{2,5\}$

$\{3,4\}$

$\{3,5\}$

$\{4,5\}$

$$\{1,2,3,4,5\}$$

$$\{1,2\} \to (A,A,0,0,0) \to \{3,4,5\}$$

$$\{1,3\}$$

$$\{1,4\}$$

$$\{1,5\}$$

$$\{2,3\}$$

$$\{2,4\}$$

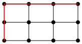
$$\{2,5\}$$

$$\{3,4\}$$

$$\{3,5\}$$

$$\{4,5\}$$

$$\{1,2,3,4,5\}$$

$\{1,2\} \rightarrow (A,A,0,0,0) \rightarrow \{3,4,5\} \rightarrow$ 

$\{1,3\}$

$\{1,4\}$

$\{1,5\}$

$\{2,3\}$

$\{2,4\}$

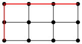
$\{2,5\}$

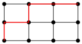
$\{3,4\}$

$\{3,5\}$

$\{4,5\}$

$$\{1,2,3,4,5\}$$

$\{1,2\} \to (A,A,0,0,0) \to \{3,4,5\} \to$ 

$\{1,3\} \to (A,0,A,0,0) \to \{2,4,5\} \to$ 

$\{1,4\}$

$\{1,5\}$

$\{2,3\}$

$\{2,4\}$

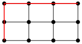
$\{2,5\}$

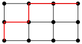
$\{3,4\}$

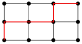
$\{3,5\}$

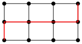
$\{4,5\}$

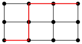
$$\{1,2,3,4,5\}$$

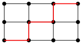
$\{1,2\} \to (A,A,0,0,0) \to \{3,4,5\} \to$ 

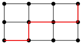
$\{1,3\} \to (A,0,A,0,0) \to \{2,4,5\} \to$ 

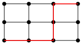
$\{1,4\} \to (A,0,0,A,0) \to \{2,3,5\} \to$ 

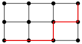
$\{1,5\} \to (A,0,0,0,A) \to \{2,3,4\} \to$ 

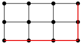
$\{2,3\} \to (0,A,A,0,0) \to \{1,4,5\} \to$ 

$\{2,4\} \to (0,A,0,A,0) \to \{1,3,5\} \to$ 

$\{2,5\} \to (0,A,0,0,A) \to \{1,3,4\} \to$ 

$\{3,4\} \to (0,0,A,A,0) \to \{1,2,5\} \to$ 

$\{3,5\} \to (0,0,A,0,A) \to \{1,2,4\} \to$ 

$\{4,5\} \to (0,0,0,A,A) \to \{1,2,3\} \to$ 

Sono sempre 10.

#1: tutti i modi in cui può andare storta

#1: tutti i modi in cui può andare storta

Con n compiti, in quanti modi a nessuno il suo?

#1: tutti i modi in cui può andare storta

Con n compiti, in quanti modi a nessuno il suo?

$n = 5 \longrightarrow 44$

#1: tutti i modi in cui può andare storta

Con n compiti, in quanti modi a nessuno il suo?

$n = 5 \longrightarrow 44$
$n = 10 \longrightarrow 1334961$

Con n compiti, in quanti modi a nessuno il suo?

$n = 5 \longrightarrow 44$

$n = 10 \longrightarrow 1334961$

$n = 50 \longrightarrow \underbrace{111887\ldots}_{\text{65 cifre}}$

#1: tutti i modi in cui può andare storta

Con n compiti, in quanti modi a nessuno il suo?

$n = 5 \longrightarrow 44$ 120

$n = 10 \longrightarrow 1334961$ 3628800

$n = 50 \longrightarrow \underbrace{111887\ldots}_{\text{65 cifre}}$ $\underbrace{304141\ldots}_{\text{65 cifre}}$

Problema #2

Problema #2

In una corsa con 10 podisti, quanti sono i possibili ordini di arrivo? Quanti i possibili podi?

Problema #2

In una corsa con 10 podisti, quanti sono i possibili ordini di arrivo? Quanti i possibili podi?

Disposizioni senza ripetizione.

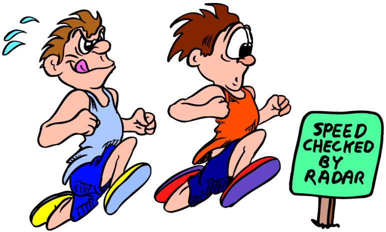
Problema #2

In una corsa con 10 podisti, quanti sono i possibili ordini di arrivo? Quanti i possibili podi?

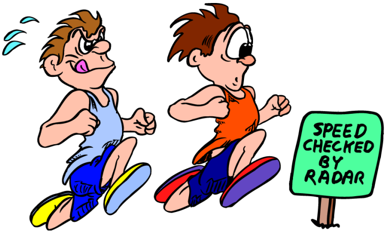
Disposizioni senza ripetizione.

(Paolo, Giovanna, Alberto) $\neq$ (Giovanna, Alberto, Paolo)

Problema #3

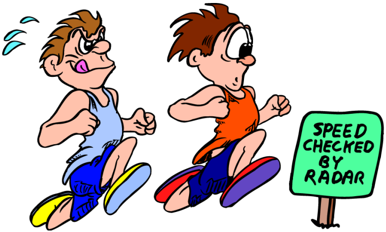


Problema #3



In 3 corse con gli stessi partecipanti, quanti sono le possibili sequenze dei 3 vincitori?

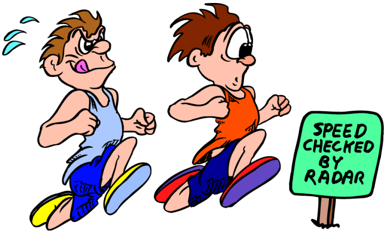
Problema #3



In 3 corse con gli stessi partecipanti, quanti sono le possibili sequenze dei 3 vincitori?

Disposizioni con ripetizione.

Problema #3



In 3 corse con gli stessi partecipanti, quanti sono le possibili sequenze dei 3 vincitori?

Disposizioni con ripetizione.

(Paolo, Giovanna, Paolo) $\neq$ (Giovanna, Paolo, Paolo)

Problema #4

Problema #4

In una corsa con 6 partecipanti, quanti sono i possibili gruppi di perdenti (cioè, esclusi dal podio)?

Problema #4

In una corsa con 6 partecipanti, quanti sono i possibili gruppi di perdenti (cioè, esclusi dal podio)?

Combinazioni senza ripetizione.

Problema #4

In una corsa con 6 partecipanti, quanti sono i possibili gruppi di perdenti (cioè, esclusi dal podio)?

Combinazioni senza ripetizione.
[Paolo, Giovanna, Alberto] $=$ [Giovanna, Alberto, Paolo]

Problema #5

Problema #5

In 3 corse con gli stessi partecipanti, facciamo la classifica finale dei vincitori. Due classifiche sono differenti se c'è almeno un nome che compare un numero differente di volte.

Problema #5

In 3 corse con gli stessi partecipanti, facciamo la classifica finale dei vincitori. Due classifiche sono differenti se c'è almeno un nome che compare un numero differente di volte. Combinazioni con ripetizione.

Problema #5

In 3 corse con gli stessi partecipanti, facciamo la classifica finale dei vincitori. Due classifiche sono differenti se c'è almeno un nome che compare un numero differente di volte. Combinazioni con ripetizione.

[Paolo, Ada, Paolo] $=$ [Ada, Paolo, Paolo] $\neq$ [Ada, Paolo, Ada]

Nelle disposizioni conta sia il numero di volte in cui ogni oggetto compare nella sequenza sia le posizioni in cui compare.

Nelle disposizioni conta sia il numero di volte in cui ogni oggetto compare nella sequenza sia le posizioni in cui compare.

$(1, 2, 5, 4) \neq (1, 2, 4, 5)$

Nelle disposizioni conta sia il numero di volte in cui ogni oggetto compare nella sequenza sia le posizioni in cui compare.

$(1,2,5,4) \neq (1,2,4,5)$

$(1,1,1,2) \neq (1,2,1,1)$

Nelle disposizioni conta sia il numero di volte in cui ogni oggetto compare nella sequenza sia le posizioni in cui compare.

$(1,2,5,4) \neq (1,2,4,5)$

$(1,1,1,2) \neq (1,2,1,1)$

Nelle combinazioni conta solo il numero di volte in cui ogni oggetto compare nella sequenza.

Nelle disposizioni conta sia il numero di volte in cui ogni oggetto compare nella sequenza sia le posizioni in cui compare.

$(1, 2, 5, 4) \neq (1, 2, 4, 5)$

$(1, 1, 1, 2) \neq (1, 2, 1, 1)$

Nelle combinazioni conta solo il numero di volte in cui ogni oggetto compare nella sequenza.

$[1, 2, 5, 4] = [1, 2, 4, 5]$

Nelle disposizioni conta sia il numero di volte in cui ogni oggetto compare nella sequenza sia le posizioni in cui compare.

$(1, 2, 5, 4) \neq (1, 2, 4, 5)$

$(1, 1, 1, 2) \neq (1, 2, 1, 1)$

Nelle combinazioni conta solo il numero di volte in cui ogni oggetto compare nella sequenza.

$[1, 2, 5, 4] = [1, 2, 4, 5]$

$[1, 1, 1, 2] = [1, 2, 1, 1]$

Nelle disposizioni conta sia il numero di volte in cui ogni oggetto compare nella sequenza sia le posizioni in cui compare.

$(1, 2, 5, 4) \neq (1, 2, 4, 5)$

$(1, 1, 1, 2) \neq (1, 2, 1, 1)$

Nelle combinazioni conta solo il numero di volte in cui ogni oggetto compare nella sequenza.

$[1, 2, 5, 4] = [1, 2, 4, 5]$

$[1, 1, 1, 2] = [1, 2, 1, 1]$

Senza ripetizioni

Nelle disposizioni conta sia il numero di volte in cui ogni oggetto compare nella sequenza sia le posizioni in cui compare.

$(1, 2, 5, 4) \neq (1, 2, 4, 5)$

$(1, 1, 1, 2) \neq (1, 2, 1, 1)$

Nelle combinazioni conta solo il numero di volte in cui ogni oggetto compare nella sequenza.

$[1, 2, 5, 4] = [1, 2, 4, 5]$

$[1, 1, 1, 2] = [1, 2, 1, 1]$

Senza ripetizioni

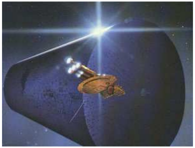
Con ripetizioni

anagrammi

Quanti sono gli anagrammi di ROMA?

anagrammi

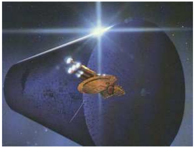
Quanti sono gli anagrammi di ROMA?



Quanti sono gli anagrammi di RAMA?

anagrammi

Quanti sono gli anagrammi di ROMA?



Quanti sono gli anagrammi di RAMA?

Permutazioni senza e con ripetizione


Ready! Steady! Go!

D'ora in poi il nostro insieme di oggetti sarà

$$X := \{1, 2, \ldots, n\}.$$

D'ora in poi il nostro insieme di oggetti sarà

$$X := \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Cioè $\#X = n$ ($\#$ cardinalità, numero di elementi)

D'ora in poi il nostro insieme di oggetti sarà

$$X := \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Cioè $\#X = n$ (# cardinalità, numero di elementi)

Disposizioni

Una disposizione in k posti è una sequenza di k elementi di X

$$(x_1, \ldots, x_k)$$

cioè un elemento dell'insieme X^k.

D'ora in poi il nostro insieme di oggetti sarà

$$X := \{1, 2, \dots, n\}.$$

Cioè $\#X = n$ (# cardinalità, numero di elementi)

Disposizioni

Una disposizione in k posti è una sequenza di k elementi di X

$$(x_1, \dots, x_k)$$

cioè un elemento dell'insieme X^k.

Conveniamo che $(x_1, \dots, x_k) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$ se e solo se $x_1 = \bar{x}_1$, ..., $x_k = \bar{x}_k$.

D'ora in poi il nostro insieme di oggetti sarà

$$X := \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Cioè $\#X = n$ ($\#$ cardinalità, numero di elementi)

Disposizioni

Una disposizione in k posti è una sequenza di k elementi di X

$$(x_1, \ldots, x_k)$$

cioè un elemento dell'insieme X^k.
Se ogni volta che $i \neq j$ si ha $x_i \neq x_j$, allora parliamo di disposizione semplice o senza ripetizione.

Conveniamo che $(x_1, \ldots, x_k) = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k)$ se e solo se $x_1 = \bar{x}_1$, ..., $x_k = \bar{x}_k$.

D'ora in poi il nostro insieme di oggetti sarà

$$X := \{1, 2, \dots, n\}.$$

Cioè $\#X = n$ (# cardinalità, numero di elementi)

Disposizioni

Una disposizione in k posti è una sequenza di k elementi di X

$$(x_1, \dots, x_k)$$

cioè un elemento dell'insieme X^k.
Se ogni volta che $i \neq j$ si ha $x_i \neq x_j$, allora parliamo di disposizione semplice o senza ripetizione.

Conveniamo che $(x_1, \dots, x_k) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$ se e solo se $x_1 = \bar{x}_1$, ..., $x_k = \bar{x}_k$.
Ovviamente se i posti sono più degli oggetti ($n < k$) non ci sono disposizioni semplici.

Quante sono le disposizioni?

X^k

$$\{x \in X^K : x = (1, \underbrace{\quad \dots \quad}_{k-1 \text{ elementi}})\}$$

$$X^k$$

... è una disposizione di n oggetti nei rimanenti $k-1$ posti.

$$\{x \in X^K : x = (1, \underbrace{\ldots}_{k-1 \text{ elementi}})\}$$

$$\{x \in X^K : x = (2, \underbrace{\ldots}_{k-1 \text{ elementi}})\}$$

$$X^k$$

... è una disposizione di n oggetti nei rimanenti $k-1$ posti.

$$X^k \quad \begin{cases} \{x \in X^K : x = (1, \underbrace{\ldots}_{k-1 \text{ elementi}})\} \\ \{x \in X^K : x = (2, \underbrace{\ldots}_{k-1 \text{ elementi}})\} \\ \ldots \\ \ldots \\ \{x \in X^K : x = (n, \underbrace{\ldots}_{k-1 \text{ elementi}})\} \end{cases}$$

... è una disposizione di n oggetti nei rimanenti $k-1$ posti.

$$X^k$$

$$\{x \in X^K : x = (1, \underbrace{\ \ldots\ }_{k-1 \text{ elementi}})\}$$

$$\{x \in X^K : x = (2, \underbrace{\ \ldots\ }_{k-1 \text{ elementi}})\}$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

$$\{x \in X^K : x = (n, \underbrace{\ \ldots\ }_{k-1 \text{ elementi}})\}$$

... è una disposizione di n oggetti nei rimanenti $k-1$ posti.

Cosa stiamo facendo esattamente qui?

Principio di addizione (Scelte successive)

Se

1. $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$
2. $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$

Principio di addizione (Scelte successive)

Se

1. $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$
2. $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$

Principio di addizione (Scelte successive)

Se

1. $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$
2. $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$

Partizione di S

Principio di addizione (Scelte successive)

Se

1. $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$
2. $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$

allora

$$\#S = \sum_{i=1}^{k} \#S_i$$

Principio di addizione (scelte successive)

Se

1. $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$
2. $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$

allora

$$\#S = \sum_{i=1}^{n} \#S_i$$

Principio di moltiplicazione

Se

Principio di addizione (scelte successive)

Se

1. $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$
2. $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$

allora

$$\#S = \sum_{i=1}^{n} \#S_i$$

Principio di moltiplicazione

Se

$$S = \widetilde{S} \times \bar{S}$$

Principio di addizione (scelte successive)

Se

1. $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$
2. $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$

allora

$$\#S = \sum_{i=1}^n \#S_i$$

Principio di moltiplicazione

Se

$$S = \widetilde{S} \times \bar{S} := \{(x, \bar{x}) \colon x \in \widetilde{S},\ \bar{x} \in \bar{S}\}$$

Principio di addizione (scelte successive)

Se

1. $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$
2. $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$

allora

$$\#S = \sum_{i=1}^n \#S_i$$

Principio di moltiplicazione

Se

$$S = \widetilde{S} \times \bar{S} := \{(x, \bar{x}) \colon x \in \widetilde{S}, \, \bar{x} \in \bar{S}\}$$

allora

$$\#S = \#\widetilde{S} \cdot \#\bar{S}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \{x \in X^K : x = (1, \bar{x})\} \\
 & \{x \in X^K : x = (2, \bar{x})\} \\
X^k \arrow[ruu] \arrow[ru] \arrow[r] \arrow[rd] \arrow[rdd] & \cdots \\
 & \cdots \\
 & \{x \in X^K : x = (n, \bar{x})\}
\end{tikzcd}
$$

$\bar{x} \in X^{k-1}$ è una disposizione di n oggetti nei rimanenti $k-1$ posti.

Quindi in questo caso $\# X^k = \# X \cdot \# X^{k-1}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \{x \in X^K : x = (1, \bar{x})\} \\
 & \{x \in X^K : x = (2, \bar{x})\} \\
X^k \arrow[ur] \arrow[uur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \dots \\
 & \dots \\
 & \{x \in X^K : x = (n, \bar{x})\}
\end{tikzcd}
$$

$\bar{x} \in X^{k-1}$ è una disposizione di n oggetti nei rimanenti $k-1$ posti.

Quindi in questo caso $\#X^k = \#X \cdot \#X^{k-1} = n \cdot \#X^{k-1}$.

$$\#X^k = n \cdot \#X^{k-1}$$

 $\#X^k = n \cdot \#X^{k-1}$

Se $k = 1$ ovviamente $\#X^1 = \#X = n$

$$\#X^k = n \cdot (n \cdot \#X^{k-2})$$

$$\#X^k = n^2 \cdot \#X^{k-2}$$

$$\#X^k = n^2 \cdot \#X^{k-2}$$

$$\#X^k = n^2 \cdot \#X^{k-2}$$

Principio di Induzione

$$\#X^k = n^2 \cdot \#X^{k-2}$$

Principio di Induzione

Numero disposizioni di n oggetti in k posti con ripetizione:

$$D^r_{n,k} := \#X^k = n^k.$$

8-bit, 16-bit

Quante sono le sequenze di 8 caratteri scelti tra 0 e 1?

8-bit, 16-bit

Quante sono le sequenze di 8 caratteri scelti tra 0 e 1?

BYTE -> ASCII

8-bit, 16-bit

Quante sono le sequenze di 8 caratteri scelti tra 0 e 1?

BYTE -> ASCII

$2^8 = 256$

8-bit, 16-bit

Quante sono le sequenze di 8 caratteri scelti tra 0 e 1?
BYTE -> ASCII

$2^8 = 256$

Quante sono le sequenze di 16 caratteri scelti tra 0 e 1?

8-bit, 16-bit

Quante sono le sequenze di 8 caratteri scelti tra 0 e 1?
BYTE -> ASCII

$2^8 = 256$

Quante sono le sequenze di 16 caratteri scelti tra 0 e 1?

$2^{16} = 256^2 = 65536$

E quante sono le disposizioni semplici (senza ripetizione)?

E quante sono le disposizioni semplici (senza ripetizione)?

Se $n < k$ non ce ne sono. Quindi supponiamo che $n \geq k$.

Intermezzo pubblicitario: Biezioni

Osserviamo che, dati due insiemi S e H,

Intermezzo pubblicitario: Biezioni

Osserviamo che, dati due insiemi S e H,

$$\#S = \#H$$

Intermezzo pubblicitario: Biezioni

Osserviamo che, dati due insiemi S e H,

$$\#S = \#H$$

se e solo se

Intermezzo pubblicitario: Biezioni

Osserviamo che, dati due insiemi S e H,

$$\#S = \#H$$

se e solo se

esiste una funzione $f : S \to H$ tale che

1. se $x \neq s$ allora $f(x) \neq f(s)$
2. per ogni $y \in H$ esiste $x \in S$ tale che $f(x) = y$.

Intermezzo pubblicitario: Biezioni

Osserviamo che, dati due insiemi S e H,

$$\#S = \#H$$

se e solo se

esiste una funzione $f : S \to H$ tale che

1. se $x \neq s$ allora $f(x) \neq f(s)$
2. per ogni $y \in H$ esiste $x \in S$ tale che $f(x) = y$.

Intermezzo pubblicitario: Biezioni

Osserviamo che, dati due insiemi S e H,

$$\#S = \#H$$

se e solo se

esiste una funzione $f : S \to H$ tale che

1. se $x \neq s$ allora $f(x) \neq f(s)$
2. per ogni $y \in H$ esiste $x \in S$ tale che $f(x) = y$.

biettiva

Intermezzo pubblicitario: Biezioni

Osserviamo che, dati due insiemi S e H,

$$\#S = \#H$$

se e solo se

esiste una funzione $f : S \to H$ tale che

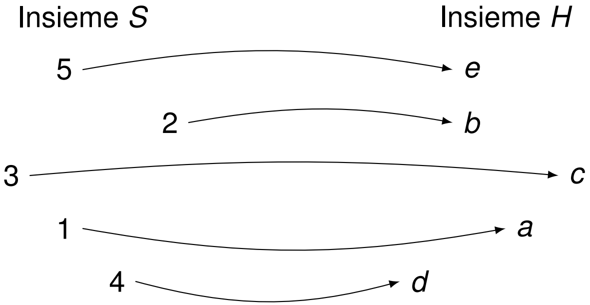
1. se $x \neq s$ allora $f(x) \neq f(s)$
2. per ogni $y \in H$ esiste $x \in S$ tale che $f(x) = y$.

biettiva

Questo si intende quando si dice "identifichiamo ogni elemento di S con uno ed un solo elemento di H"

Intermezzo pubblicitario: Biezioni

Funzione biettiva da S ad H



Intermezzo pubblicitario: Biezioni

Come conseguenza il numero di disposizioni o combinazioni (con o senza ripetizioni) in k posti di elementi di un insieme X

DIPENDE SOLO DA $\#X$

.

Intermezzo pubblicitario: Biezioni

Come conseguenza il numero di disposizioni o combinazioni (con o senza ripetizioni) in k posti di elementi di un insieme X

DIPENDE SOLO DA $\#X$

Usiamo subito questo principio per calcolare il numero di disposizioni di n oggetti in k posti senza ripetizione, $D_{n,k}$.

$$D_{n,k}$$

$\{x \in X^K : x = (1, \bar{x})\}, \to$ sono $D_{n-1,k-1}$

$D_{n,k}$

$\bar{x}$ è una disposizione senza ripetizione degli $n-1$ oggetti di X (differenti da 1) nei rimanenti $k-1$ posti.

$\{x \in X^K : x = (1, \bar{x})\}, \to$ sono $D_{n-1,k-1}$

$\{x \in X^K : x = (2, \bar{x})\}, \to$ sono $D_{n-1,k-1}$

$D_{n,k}$

$\bar{x}$ è una disposizione senza ripetizione degli $n-1$ oggetti di X (differenti da 2) nei rimanenti $k-1$ posti.

$$
\begin{array}{lll}
 & \nearrow & \{x \in X^K : x = (1, \bar{x})\}, \rightarrow \text{sono } D_{n-1,k-1} \\
 & \nearrow & \{x \in X^K : x = (2, \bar{x})\}, \rightarrow \text{sono } D_{n-1,k-1} \\
D_{n,k} & \rightarrow & \dots \\
 & \searrow & \dots \\
 & \searrow & \{x \in X^K : x = (n, \bar{x})\}, \rightarrow \text{sono } D_{n-1,k-1}
\end{array}
$$

$\bar{x}$ è una disposizione senza ripetizione degli $n-1$ oggetti di X (differenti da n) nei rimanenti $k-1$ posti.

$D_{n,k}$

- $\to \{x \in X^K : x = (1, \bar{x})\}$, $\to$ sono $D_{n-1,k-1}$
- $\to \{x \in X^K : x = (2, \bar{x})\}$, $\to$ sono $D_{n-1,k-1}$
- $\to \ldots$
- $\to \ldots$
- $\to \{x \in X^K : x = (n, \bar{x})\}$, $\to$ sono $D_{n-1,k-1}$

Quindi in questo caso $D_{n,k} = n \cdot D_{n-1,k-1}$

$$D_{n,k} = n \cdot D_{n-1,k-1}$$

$$D_{n,k} = n \cdot D_{n-1,k-1}$$

Se $k = 1$ ovviamente $D_{n,1} = \#X = n$

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot D_{n-2,k-2}$$

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot D_{n-2,k-2}$$

Principio di Induzione

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot D_{n-2,k-2}$$

Principio di Induzione

Numero disposizioni di n oggetti in k posti senza ripetizione:

$$D^r_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$$

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot D_{n-2,k-2}$$

Principio di Induzione

Numero disposizioni di n oggetti in k posti senza ripetizione:

$$D^r_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dove il fattoriale $n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$.

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot D_{n-2,k-2}$$

Principio di Induzione

Numero disposizioni di n oggetti in k posti senza ripetizione:

$$D^r_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dove il fattoriale $n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Per convenzione $0! := 1$.

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot D_{n-2,k-2}$$

Principio di Induzione

Numero disposizioni di n oggetti in k posti senza ripetizione:

$$D^r_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Se $n = k$ si chiamano permutazioni senza ripetizione: ordinamenti di n oggetti differenti. Sono $n!$.

Anagrammi di ROMA

Quanti sono gli anagrammi di ROMA?

Anagrammi di ROMA

Quanti sono gli anagrammi di ROMA?

4 caratteri diversi in 4 posti $\longrightarrow 4! = 24$.

ROMA	*ROAM*	*RAMO*	*RAOM*	*RMAO*	*RMOA*
ORMA	*ORAM*	*OMRA*	*OMAR*	*OAMR*	*OARM*
MORA	*MOAR*	*MRAO*	*MROA*	*MAOR*	*MARO*
AMOR	*AMRO*	*ARMO*	*AROM*	*AORM*	*AOMR*

Se $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $k = 3$
abbiamo $5!/2! = 60$ disposizioni senza ripetizione.

Se $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $k = 3$
abbiamo $5!/2! = 60$ disposizioni senza ripetizione.

Se ne scegliamo una, es. $(3, 1, 4)$, quanti sono i suoi "riordinamenti"?

Se $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $k = 3$
abbiamo $5!/2! = 60$ disposizioni senza ripetizione.

Se ne scegliamo una, es. $(3, 1, 4)$, quanti sono i suoi "riordinamenti"?

Vuol dire trovare tutte le permutazioni dei suoi 3 elementi $\{1, 3, 4\}$.

$$\text{Sono } 3! = 6$$

$$(1,3,4)\ (1,4,3)\ (3,1,4)\ (3,4,1)\ (4,1,3)\ (4,3,1)$$

Idea euristica

Nelle combinazioni l'ordine non importa

Idea euristica

Nelle combinazioni l'ordine non importa

Quindi, se $[1, 3, 4]$ rappresentasse una combinazione, dovremmo identificare tutte le permutazioni

$$[1, 3, 4] \equiv [1, 4, 3] \equiv [3, 1, 4] \equiv [3, 4, 1] \equiv [4, 1, 3] \equiv [4, 3, 1]$$

Idea euristica

Nelle combinazioni l'ordine non importa

Quindi, se $[1,3,4]$ rappresentasse una combinazione, dovremmo identificare tutte le permutazioni

$$[1,3,4] \equiv [1,4,3] \equiv [3,1,4] \equiv [3,4,1] \equiv [4,1,3] \equiv [4,3,1]$$

IDEA

[1,3,4]:={(1,3,4), (1,4,3), (3,1,4), (3,4,1), (4,1,3), (4,3,1)}

IDEA

[1,3,4]:={(1,3,4), (1,4,3), (3,1,4), (3,4,1), (4,1,3), (4,3,1)}

IDEA

[1,3,4]:={(1,3,4), (1,4,3), (3,1,4), (3,4,1), (4,1,3), (4,3,1)}

- Se prendiamo una permutazione, es. $[4, 1, 3]$ ottengo sempre lo stesso insieme.
- Due insiemi $[x_1, \ldots, x_k]$ e $[y_1, \ldots, y_m]$ sono uguali se contengono gli stessi elementi ripetuti lo stesso numero di volte, altrimenti sono disgiunti.

IDEA

[1,3,4]:={(1,3,4), (1,4,3), (3,1,4), (3,4,1), (4,1,3), (4,3,1)}

- Se prendiamo una permutazione, es. $[4, 1, 3]$ ottengo sempre lo stesso insieme.
- Due insiemi $[x_1, \ldots, x_k]$ e $[y_1, \ldots, y_m]$ sono uguali se contengono gli stessi elementi ripetuti lo stesso numero di volte, altrimenti sono disgiunti.

IDEA

[1,3,4]:={(1,3,4), (1,4,3), (3,1,4), (3,4,1), (4,1,3), (4,3,1)}

- Se prendiamo una permutazione, es. $[4, 1, 3]$ ottengo sempre lo stesso insieme.
- Due insiemi $[x_1, \dots, x_k]$ e $[y_1, \dots, y_m]$ sono uguali se contengono gli stessi elementi ripetuti lo stesso numero di volte, altrimenti sono disgiunti.

Combinazioni

Una combinazione di n oggetti in k posti, $x_1, \dots x_k \in X$, è l'insieme $[x_1, \dots, x_k]$ che contiene la disposizione $(x_1, \dots, x_k)$ e tutte le sue permutazioni.

Scelta una combinazione, le disposizioni contenute sono permutazioni l'una dell'altra.

Scelta una combinazione, le disposizioni contenute sono permutazioni l'una dell'altra. $\longrightarrow$ ANAGRAMMI

Scelta una combinazione, le disposizioni contenute sono permutazioni l'una dell'altra. $\longrightarrow$ ANAGRAMMI

(senza ripetizione) IDA, IAD, DIA, DAI, AID, ADI

Scelta una combinazione, le disposizioni contenute sono permutazioni l'una dell'altra. $\longrightarrow$ ANAGRAMMI

(senza ripetizione) IDA, IAD, DIA, DAI, AID, ADI   Sono $n!$

Scelta una combinazione, le disposizioni contenute sono permutazioni l'una dell'altra. $\longrightarrow$ ANAGRAMMI

(senza ripetizione) IDA, IAD, DIA, DAI, AID, ADI   Sono $n!$

(con ripetizione) ADA, AAD, DAA

Scelta una combinazione, le disposizioni contenute sono permutazioni l'una dell'altra. $\longrightarrow$ ANAGRAMMI

(senza ripetizione) IDA, IAD, DIA, DAI, AID, ADI Sono $n!$

(con ripetizione) ADA, AAD, DAA Vedremo quante sono

Scelta una combinazione, le disposizioni contenute sono permutazioni l'una dell'altra. $\longrightarrow$ ANAGRAMMI

(senza ripetizione) IDA, IAD, DIA, DAI, AID, ADI   Sono $n!$

(con ripetizione) ADA, AAD, DAA   Vedremo quante sono

Prese due combinazioni:
o sono uguali oppure sono disgiunte.

Ma quante sono le combinazioni in k posti senza ripetizione, $C_{n,k}$?

Ma quante sono le combinazioni in k posti senza ripetizione, $C_{n,k}$?

Se il numero di oggetti $n < k$ allora non ce ne sono. Prendiamo quindi $n \geq k$.

Ma quante sono le combinazioni in k posti senza ripetizione, $C_{n,k}$?

Se il numero di oggetti $n < k$ allora non ce ne sono. Prendiamo quindi $n \geq k$.

Sappiamo che

1. ogni combinazione C senza ripetizione contiene disposizioni senza ripetizione
2. due combinazioni differenti non hanno disposizioni in comune
3. ogni disposizione sta in una combinazione

Ma quante sono le combinazioni in k posti senza ripetizione, $C_{n,k}$?

Se il numero di oggetti $n < k$ allora non ce ne sono. Prendiamo quindi $n \geq k$.

Sappiamo che

1. ogni combinazione C senza ripetizione contiene disposizioni senza ripetizione
2. due combinazioni differenti non hanno disposizioni in comune
3. ogni disposizione sta in una combinazione

Ma quante sono le combinazioni in k posti senza ripetizione, $C_{n,k}$?

Se il numero di oggetti $n < k$ allora non ce ne sono. Prendiamo quindi $n \geq k$.

Sappiamo che

1. ogni combinazione C senza ripetizione contiene disposizioni senza ripetizione
2. due combinazioni differenti non hanno disposizioni in comune
3. ogni disposizione sta in una combinazione

Quindi le combinazioni senza ripetizione sono una partizione delle disposizioni senza ripetizione.

Quindi le combinazioni senza ripetizione sono una partizione delle disposizioni senza ripetizione.

Principio di addizione

$$\Longrightarrow D_{n,k} = \sum_{C \text{ combinazioni senza ripetizione}} \#C$$

Quindi le combinazioni senza ripetizione sono una partizione delle disposizioni senza ripetizione.

Principio di addizione

$$\Longrightarrow D_{n,k} = \sum_{C \text{ combinazioni senza ripetizione}} \#C$$

Ma ogni combinazione contiene una disposizione e tutte (e sole) le sue permutazioni. Quante sono?

Quindi le combinazioni senza ripetizione sono una partizione delle disposizioni senza ripetizione.

Principio di addizione

$$\Longrightarrow D_{n,k} = \sum_{C \text{ combinazioni senza ripetizione}} \#C$$

Ma ogni combinazione contiene una disposizione e tutte (e sole) le sue permutazioni. Quante sono? Non essendoci elementi ripetuti, si ha $\#C = k!$ per ogni combinazione senza ripetizione C.

Quindi le combinazioni senza ripetizione sono una partizione delle disposizioni senza ripetizione.

Principio di addizione

$$\Longrightarrow D_{n,k} = \sum_{C \text{ combinazioni senza ripetizione}} \#C$$

Ma ogni combinazione contiene una disposizione e tutte (e sole) le sue permutazioni. Quante sono? Non essendoci elementi ripetuti, si ha $\#C = k!$ per ogni combinazione senza ripetizione C.

Quindi

$$\frac{n!}{(n-k)!} = D_{n,k} = C_{n,k} \cdot k!$$

Quindi le combinazioni senza ripetizione sono una partizione delle disposizioni senza ripetizione.

Principio di addizione

$$\Longrightarrow D_{n,k} = \sum_{C \text{ combinazioni senza ripetizione}} \#C$$

Ma ogni combinazione contiene una disposizione e tutte (e sole) le sue permutazioni. Quante sono? Non essendoci elementi ripetuti, si ha $\#C = k!$ per ogni combinazione senza ripetizione C.
Quindi

$$\frac{n!}{(n-k)!} = D_{n,k} = C_{n,k} \cdot k!$$

Combinazioni semplici di n oggetti in k posti

$$\Longrightarrow C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

In una combinazione conta solo quali oggetti compaiono e quante volte, l'ordine non conta.

In una combinazione conta solo quali oggetti compaiono e quante volte, l'ordine non conta.

Se non c'è ripetizione, una combinazione equivale ad un sottoinsieme di X.

In una combinazione conta solo quali oggetti compaiono e quante volte, l'ordine non conta.

Se non c'è ripetizione, una combinazione equivale ad un sottoinsieme di X.

$$\Downarrow$$

si possono identificare con i sottoinsiemi di X contenenti k elementi.

In una combinazione conta solo quali oggetti compaiono e quante volte, l'ordine non conta.

Se non c'è ripetizione, una combinazione equivale ad un sottoinsieme di X.

$$\Downarrow$$

si possono identificare con i sottoinsiemi di X contenenti k elementi.

Sono

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Facciamo un gioco. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $k = 2$, consideriamo le $\binom{4}{2} = 6$ combinazioni senza ripetizione.

Facciamo un gioco. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $k = 2$, consideriamo le $\binom{4}{2} = 6$ combinazioni senza ripetizione.

$$[1, 2]$$
$$[1, 3]$$
$$[1, 4]$$
$$[2, 3]$$
$$[2, 4]$$
$$[3, 4]$$

Facciamo un gioco. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $k = 2$, consideriamo le $\binom{4}{2} = 6$ combinazioni senza ripetizione.

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad \{1,2,3,4\} \\
[1,2] \to (1,1,0,0) \\
[1,3] \\
[1,4] \\
[2,3] \\
[2,4] \\
[3,4]
\end{array}
$$

Facciamo un gioco. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $k = 2$, consideriamo le $\binom{4}{2} = 6$ combinazioni senza ripetizione.

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad \{1,2,3,4\} \\
[1,2] \to (1,1,0,0) \\
[1,3] \to (1,0,1,0) \\
[1,4] \\
[2,3] \\
[2,4] \\
[3,4]
\end{array}
$$

Facciamo un gioco. Sia $X = \{1,2,3,4\}$ e $k = 2$, consideriamo le $\binom{4}{2} = 6$ combinazioni senza ripetizione.

$$
\begin{aligned}
&\{1,2,3,4\} \\
[1,2] &\to (1,1,0,0) \\
[1,3] &\to (1,0,1,0) \\
[1,4] &\to (1,0,0,1) \\
[2,3] &\to (0,1,1,0) \\
[2,4] &\to (0,1,0,1) \\
[3,4] &\to (0,0,1,1)
\end{aligned}
$$

Facciamo un gioco. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $k = 2$, consideriamo le $\binom{4}{2} = 6$ combinazioni senza ripetizione.

$$
\begin{aligned}
&\{1,2,3,4\}\\
[1,2] &\to (1,1,0,0)\\
[1,3] &\to (1,0,1,0)\\
[1,4] &\to (1,0,0,1)\\
[2,3] &\to (0,1,1,0)\\
[2,4] &\to (0,1,0,1)\\
[3,4] &\to (0,0,1,1)
\end{aligned}
$$

Sono tante quante le disposizioni di due oggetti in n posti in cui il primo compare k volte e l'altro $n - k$ volte.

Facciamo un gioco. Sia $X = \{1,2,3,4\}$ e $k = 2$, consideriamo le $\binom{4}{2} = 6$ combinazioni senza ripetizione.

$$
\begin{aligned}
& \{1,2,3,4\} \\
[1,2] &\to (1,1,0,0) \\
[1,3] &\to (1,0,1,0) \\
[1,4] &\to (1,0,0,1) \\
[2,3] &\to (0,1,1,0) \\
[2,4] &\to (0,1,0,1) \\
[3,4] &\to (0,0,1,1)
\end{aligned}
$$

Sono tante quante le disposizioni di due oggetti in n posti in cui il primo compare k volte e l'altro $n-k$ volte. Sono $\binom{n}{k}$.

Abbiamo usato il fatto che

$$\#C = k!$$

nel caso di una combinazione senza ripetizione.

Abbiamo usato il fatto che

$$\#C = k!$$

nel caso di una combinazione senza ripetizione.

Questo non è più vero se ci sono ripetizioni

Abbiamo usato il fatto che

$$\#C = k!$$

nel caso di una combinazione senza ripetizione.

Questo non è più vero se ci sono ripetizioni

$$[1,1,2] = \{(1,1,2),\ (1,2,1),\ (2,1,1)\}$$
$$[1,1,1] = \{(1,1,1)\}$$

Abbiamo usato il fatto che

$$\#C = k!$$

nel caso di una combinazione senza ripetizione.

Questo non è più vero se ci sono ripetizioni

$$[1,1,2] = \{(1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)\}$$
$$[1,1,1] = \{(1,1,1)\}$$

COSA FACCIAMO?

Una combinazione di n oggetti in k posti è univocamente determinata dal numero di volte in cui compare ogni oggetto.

Una combinazione di n oggetti in k posti è univocamente determinata dal numero di volte in cui compare ogni oggetto.

k_1 volte appare 1, k_2 volte appare 2, $\ldots$, k_n volte appare n.

Una combinazione di n oggetti in k posti è univocamente determinata dal numero di volte in cui compare ogni oggetto.

k_1 volte appare 1, k_2 volte appare 2, ..., k_n volte appare n.
$(k_1 + \cdots k_n = k, \qquad\qquad\qquad\qquad)$

Una combinazione di n oggetti in k posti è univocamente determinata dal numero di volte in cui compare ogni oggetto.

k_1 volte appare 1, k_2 volte appare 2, . . . , k_n volte appare n.
($k_1 + \cdots k_n = k$, $\quad k_i \geq 0$ per ogni i)

Identifichiamo con

$$\underbrace{\bigcirc\,\bigcirc\cdots\bigcirc}_{k_1}\,\rule{0.3em}{1.2em}\,\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{k_2}\,\rule{0.3em}{1.2em}\cdots\rule{0.3em}{1.2em}\,\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{k_n}$$

Una combinazione di n oggetti in k posti è univocamente determinata dal numero di volte in cui compare ogni oggetto.

k_1 volte appare 1, k_2 volte appare 2, ..., k_n volte appare n.
$(k_1 + \cdots k_n = k, \quad k_i \geq 0$ per ogni $i)$

Identifichiamo con

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{k_1}\,\rule{0.5em}{1em}\,\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{k_2}\,\rule{0.5em}{1em}\cdots\rule{0.5em}{1em}\,\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{k_n}$$

Disposizioni di k palline e $n-1$ separatori

Una combinazione di n oggetti in k posti è univocamente determinata dal numero di volte in cui compare ogni oggetto.

k_1 volte appare 1, k_2 volte appare 2, ..., k_n volte appare n.
$(k_1 + \cdots k_n = k, \quad k_i \geq 0$ per ogni $i)$

Identifichiamo con

$$\underbrace{\bigcirc\,\bigcirc\cdots\bigcirc}_{k_1}\,|\,\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{k_2}\,|\cdots|\,\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{k_n}$$

Disposizioni di k palline e $n-1$ separatori: $\binom{n+k-1}{k}$

Una combinazione di n oggetti in k posti è univocamente determinata dal numero di volte in cui compare ogni oggetto.

k_1 volte appare 1, k_2 volte appare 2, ..., k_n volte appare n.
($k_1 + \cdots k_n = k$, $\quad k_i \geq 0$ per ogni i)

Identifichiamo con

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{k_1}\,\blacksquare\,\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{k_2}\,\blacksquare\cdots\blacksquare\,\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{k_n}$$

Disposizioni di k palline e $n-1$ separatori: $\binom{n+k-1}{k}$

Combinazioni con ripetizione di n oggetti in k posti

$$\Longrightarrow C^r_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} =: \binom{n+k-1}{k}$$

Quante sono le combinazioni di $n = 4$ oggetti, $\{1, 2, 3, 4\}$, in $k = 2$ posti?

Quante sono le combinazioni di $n = 4$ oggetti, $\{1, 2, 3, 4\}$, in $k = 2$ posti?

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{2+4-1}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Quante sono le combinazioni di $n = 4$ oggetti, $\{1, 2, 3, 4\}$, in $k = 2$ posti?

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{2+4-1}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

di cui $\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ senza ripetizione.

Quante sono le combinazioni di $n = 4$ oggetti, $\{1, 2, 3, 4\}$, in $k = 2$ posti?

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{2+4-1}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

di cui $\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ senza ripetizione.

[1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4]
[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4]

Abbiamo visto che

$$[1,1,2] = \{(1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)\}$$
$$[1,1,1] = \{(1,1,1)\}$$

Abbiamo visto che

$$[1,1,2] = \{(1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)\}$$
$$[1,1,1] = \{(1,1,1)\}$$

Quante sono le disposizioni di n oggetti in k posti in cui k_1 volte compare 1, k_2 volte compare 2, ..., k_n volte compare n?

$k_1 + \cdots k_n = k$

Abbiamo visto che

$$[1,1,2] = \{(1,1,2),\ (1,2,1),\ (2,1,1)\}$$
$$[1,1,1] = \{(1,1,1)\}$$

Quante sono le disposizioni di n oggetti in k posti in cui k_1 volte compare 1, k_2 volte compare 2, ..., k_n volte compare n?

$k_1 + \cdots k_n = k$

Scelte successive: prima scegliamo le k_1 posizioni (su k totali) in cui compariranno gli 1

Abbiamo visto che

$$[1,1,2] = \{(1,1,2),\ (1,2,1),\ (2,1,1)\}$$
$$[1,1,1] = \{(1,1,1)\}$$

Quante sono le disposizioni di n oggetti in k posti in cui k_1 volte compare 1, k_2 volte compare 2, ..., k_n volte compare n?

$k_1 + \cdots k_n = k$

Scelte successive: prima scegliamo le k_1 posizioni (su k totali) in cui compariranno gli 1

$$\frac{k!}{k_1!\,(k-k_1)!}$$

Abbiamo visto che

$$[1,1,2] = \{(1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)\}$$
$$[1,1,1] = \{(1,1,1)\}$$

Quante sono le disposizioni di n oggetti in k posti in cui k_1 volte compare 1, k_2 volte compare 2, ..., k_n volte compare n?

$k_1 + \cdots k_n = k$

Scelte successive: per ogni scelta delle posizioni degli 1, scegliamo le k_2 posizioni (su $k - k_1$ totali) in cui compariranno i 2

Abbiamo visto che

$$[1,1,2] = \{(1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)\}$$
$$[1,1,1] = \{(1,1,1)\}$$

Quante sono le disposizioni di n oggetti in k posti in cui k_1 volte compare 1, k_2 volte compare 2, ..., k_n volte compare n?

$k_1 + \cdots k_n = k$

Scelte successive: per ogni scelta delle posizioni degli 1, scegliamo le k_2 posizioni (su $k - k_1$ totali) in cui compariranno i 2

$$\frac{k!}{k_1!\,(k-k_1)!} \cdot \frac{(k-k_1)!}{k_2!\,(k-k_1-k_2)!}$$

Abbiamo visto che

$$[1,1,2] = \{(1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)\}$$
$$[1,1,1] = \{(1,1,1)\}$$

Quante sono le disposizioni di n oggetti in k posti in cui k_1 volte compare 1, k_2 volte compare 2, ..., k_n volte compare n?

$k_1 + \cdots k_n = k$

Scelte successive: per ogni scelta delle posizioni degli 1, scegliamo le k_2 posizioni (su $k - k_1$ totali) in cui compariranno i 2

$$\frac{k!}{k_1!\,(k-k_1)!} \cdot \frac{(k-k_1)!}{k_2!\,(k-k_1-k_2)!}$$

Abbiamo visto che

$$[1,1,2] = \{(1,1,2),\ (1,2,1),\ (2,1,1)\}$$
$$[1,1,1] = \{(1,1,1)\}$$

Quante sono le disposizioni di n oggetti in k posti in cui k_1 volte compare 1, k_2 volte compare 2, ..., k_n volte compare n?

$k_1 + \cdots k_n = k$

Scelte successive: per ogni scelta delle posizion1 degli 1, scegliamo le k_2 posizioni (su $k - k_1$ totali) in cui compariranno i 2

$$\frac{k!}{k_1!\, k_2!\, (k - k_1 - k_2)!}$$

Abbiamo visto che

$$[1,1,2] = \{(1,1,2),\ (1,2,1),\ (2,1,1)\}$$
$$[1,1,1] = \{(1,1,1)\}$$

Quante sono le disposizioni di n oggetti in k posti in cui k_1 volte compare 1, k_2 volte compare 2, ..., k_n volte compare n?

$k_1 + \cdots k_n = k$

Scelte successive: per ogni scelta delle posizioni degli 1 e dei 2, scegliamo le k_3 posizioni (su $k - k_1 - k_2$ totali) in cui compariranno i 3

Abbiamo visto che

$$[1,1,2] = \{(1,1,2),\ (1,2,1),\ (2,1,1)\}$$
$$[1,1,1] = \{(1,1,1)\}$$

Quante sono le disposizioni di n oggetti in k posti in cui k_1 volte compare 1, k_2 volte compare 2, ..., k_n volte compare n?

$k_1 + \cdots k_n = k$

Scelte successive: per ogni scelta delle posizioni degli 1 e dei 2, scegliamo le k_3 posizioni (su $k - k_1 - k_2$ totali) in cui compariranno i 3

$$\frac{k!}{k_1!\,k_2!\,(k-k_1-k_2)!}\,\frac{(k-k_1-k_2)!}{k_3!\,(k-k_1-k_2-k_3)!}$$

Abbiamo visto che

$$[1,1,2] = \{(1,1,2),\ (1,2,1),\ (2,1,1)\}$$
$$[1,1,1] = \{(1,1,1)\}$$

Quante sono le disposizioni di n oggetti in k posti in cui k_1 volte compare 1, k_2 volte compare 2, ..., k_n volte compare n?

$k_1 + \cdots k_n = k$

Scelte successive: per ogni scelta delle posizioni degli 1 e dei 2, scegliamo le k_3 posizioni (su $k - k_1 - k_2$ totali) in cui compariranno i 3

$$\frac{k!}{k_1!\,k_2!\,k_3!(k - k_1 - k_2 - k_3)!}$$

Usando il Principio di Induzione

Permutazioni con ripetizione

Il numero di disposizioni di n oggetti in k posti in cui compare k_1 volte l'1, k_2 volte il 2, $\dots$, k_n volte l'n è

$$\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}$$

Usando il Principio di Induzione

Permutazioni con ripetizione

Il numero di disposizioni di n oggetti in k posti in cui compare k_1 volte l'1, k_2 volte il 2, ..., k_n volte l'n è

$$\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}$$

Coefficiente multinomiale

Usando il Principio di Induzione

Permutazioni con ripetizione

Il numero di disposizioni di n oggetti in k posti in cui compare k_1 volte l'1, k_2 volte il 2, $\ldots$, k_n volte l'n è

$$\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}$$

Coefficiente multinomiale

Ad esempio il numero di disposizioni di 3 oggetti in 4 posti in cui compare una R, una M e due A è

$$\frac{4!}{1!\,1!\,2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

Usando il Principio di Induzione

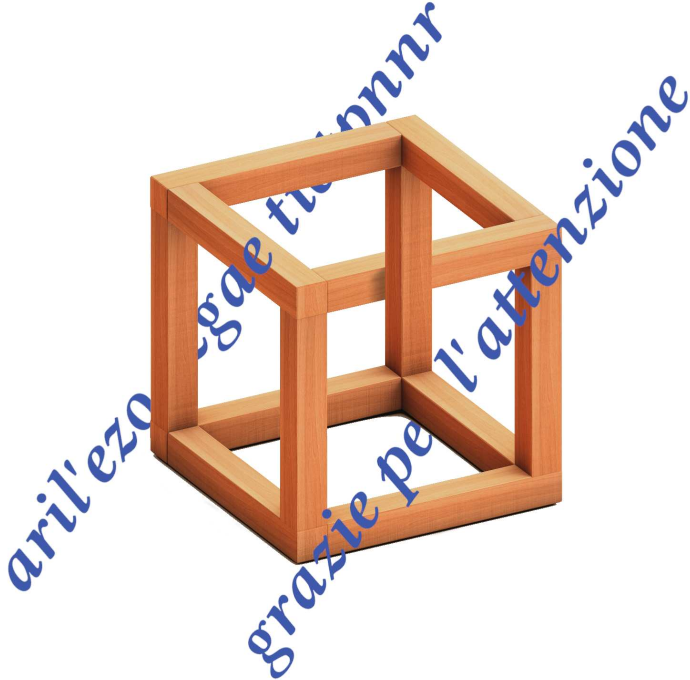
Permutazioni con ripetizione

Il numero di disposizioni di n oggetti in k posti in cui compare k_1 volte l'1, k_2 volte il 2, $\dots$, k_n volte l'n è

$$\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}$$

Coefficiente multinomiale

$$\begin{array}{ccc}
(R, M, A, A) & (R, A, M, A) & (R, A, A, M) \\
(M, R, A, A) & (M, A, R, A) & (M, A, A, R) \\
(A, R, M, A) & (A, R, A, M) & (A, M, R, A) \\
(A, M, A, R) & (A, A, R, M) & (A, A, M, R)
\end{array}$$


grazie per l'attenzione