

Richiami sulla negazione

SPUNTI TRATTI DAI LAVORI DEL PROF.
SAMUELE ANTONINI, DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA UNIVERSITÀ DI PAVIA

E IN PARTICOLARE DALL'ARTICOLO: "*NEGARE IN
MATEMATICA: UNA DIFFICOLTÀ DAL PUNTO DI
VISTRACOGNITIVO*"

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE
INTEGRATE VOL.29B N.1 FEBBRAIO 2006

Dimostrare per assurdo

SI COMINCIA COL **NEGARE** LA TESI...

Un esempio significativo

A studenti del primo anno di diversi corsi di laurea della facoltà di scienze, è stato chiesto di dimostrare per assurdo l'enunciato *se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, allora f è una funzione crescente*. Molti studenti hanno esordito: *“supponiamo per assurdo che f sia decrescente”*.

Il riferimento ad una dimostrazione per assurdo indica che la proposizione *f è decrescente rappresenta per i soggetti la **negazione della proposizione f è crescente***. Gli studenti, probabilmente distratti dalle parole *crescente e decrescente che sono una il contrario dell'altra*, hanno interpretato la negazione come un contrario, compiendo un errore che senz'altro compromette la produzione di una corretta dimostrazione.

Possibili schemi interpretativi della negazione

A) Schema dei contrari

la negazione di “ x è $p(x)$ ” è “ x è $q(x)$ ” dove q è il contrario di p .

Alcuni esempi di contrari: f è crescente - f è decrescente, n è pari- n è dispari, $a > b$ - $a < b$, tutti-nessuno.

B) Schema delle possibilità

se x non è p allora può essere p^1 , p^2 oppure p^3 , ecc. In altri termini x non possiede la proprietà p significa che ci sono varie possibilità per x : la negazione si dissolve in una moltitudine di casi diversi.

E' un modello di comportamento di un soggetto che formula la negazione come unione di casi (che chiameremo *possibilità*).

Schema delle possibilità

Durante una discussione in una classe seconda di scuola superiore, uno studente afferma che *“se non è nero non deve essere per forza bianco ma può essere giallo, verde, rosso e di mille altri colori”*.

A differenza degli esempi dello schema dei contrari, nei quali il soggetto forniva una risposta, anche se spesso errata, talvolta la moltitudine di casi (come nel caso dei colori) porta alcuni soggetti a considerare complesso o impossibile il compito di formulare la negazione di un enunciato. La negazione viene allora formulata o interpretata come una lista di casi (non nero = giallo, verde, rosso,)

Un terzo schema

Schema delle proprietà: la negazione di p è una proprietà q comune a tutte le x per cui $p(x)$ è falsa.

Esempio: la formulazione della negazione di

f è crescente esprime una proprietà comune alle funzioni non crescenti, siano esse costanti, decrescenti, discontinue, ecc. e permette di trattare in modo unitario ed efficace i diversi casi.

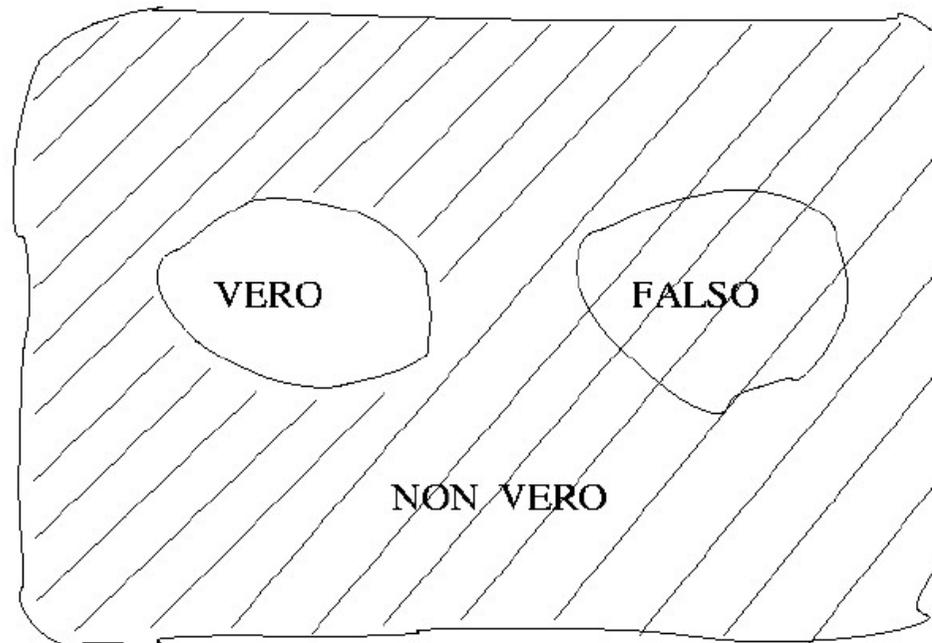
Combinazione di più schemi

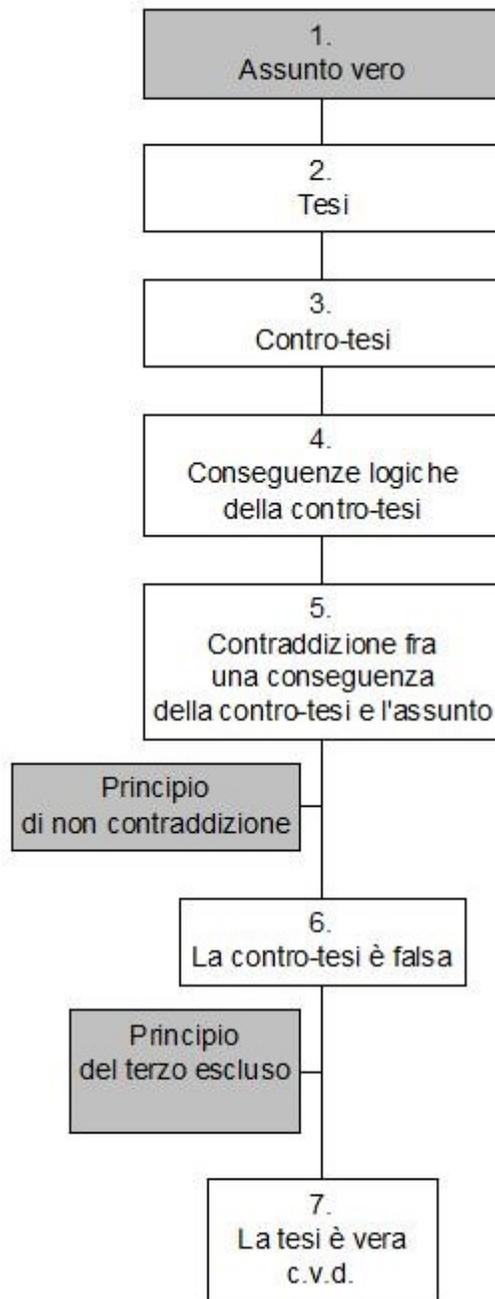
“Secondo me, se una cosa non è uguale è diversa e se non è diversa è per forza uguale. [...]” (una studentessa del secondo anno di scuola superiore)

La difficoltà a comprendere realmente il ragionamento per assurdo sta soprattutto in queste visioni della negazione

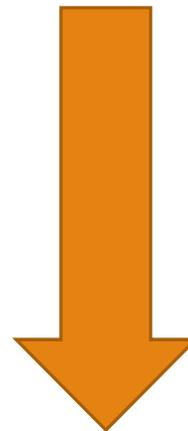
“Il non vero lo vedo come complementare del vero, il falso come staccato, opposto, potrebbe esserci qualcosa in mezzo [...] Un problema della dimostrazione per assurdo è alla fine, quel ‘non mi rimane altro che...’ Potrebbe esserci qualcosa che non hai considerato.” (Fabio, studente universitario)

Fabio spontaneamente propone un disegno per chiarire il suo pensiero:
Con “potrebbe esserci qualcosa che non hai considerato”, Fabio si riferisce all’ultima fase della dimostrazione per assurdo quando, arrivati ad una contraddizione, “non rimane altro che” affermare la validità dell’enunciato. Comportamenti riconducibili allo schema delle possibilità,





Le difficoltà degli studenti stanno nel fermarsi alla **contraddizione**



Meno intuitiva è la conclusione