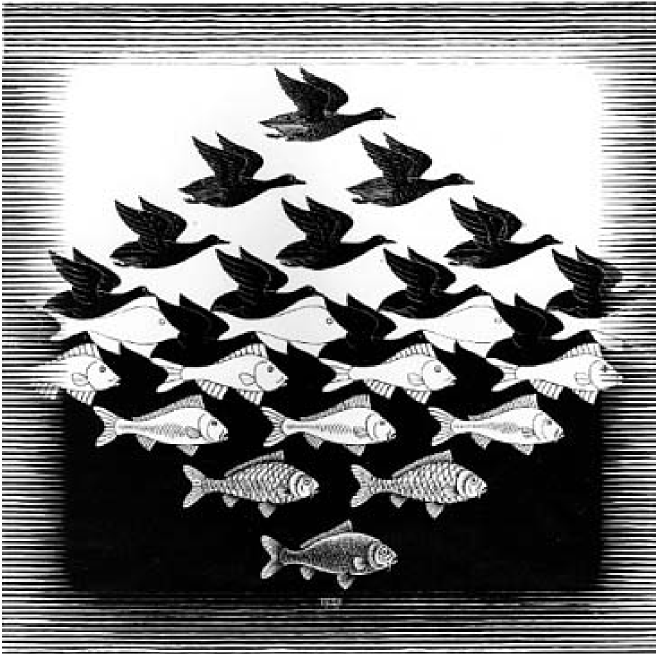
Introduzione alla geometria iperbolica: come si può ricoprire il piano con piastrelle ottagonali?

Enrico Schlesinger
Laboratorio FDS
Milano, 13 novembre, 2013

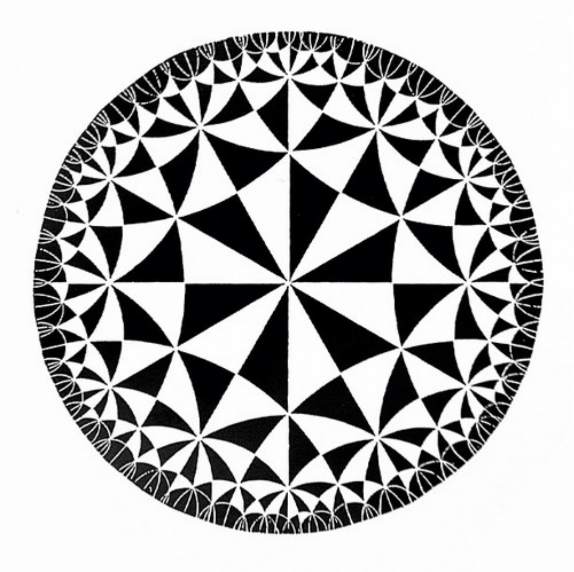
Decorazioni Alhambra

Escher Sky and water 1



Escher 2

Coxeter fig. 7



Escher: Circle limit I

Differenza?

- Decorazioni Alhambra: simmetrie del piano euclideo.
- Figura 7 di Coxeter: simmetrie del piano iperbolico.

Geometria piana: concetti primitivi

- Il piano è un insieme di punti distinti. Una retta è un luogo di punti del piano.
- Piano, punti, rette: concetti astratti, non reali. Le loro proprietà, su cui si basa la nostra intuizione, sono regolate da assiomi.
- Modello: in un contesto particolare si identificano piano, punti, rette con oggetti specifici; tali oggetti devono verificare gli assiomi. Tutte le proprietà dimostrate per i concetti astratti a partire dagli assiomi valgono per gli oggetti del modello.

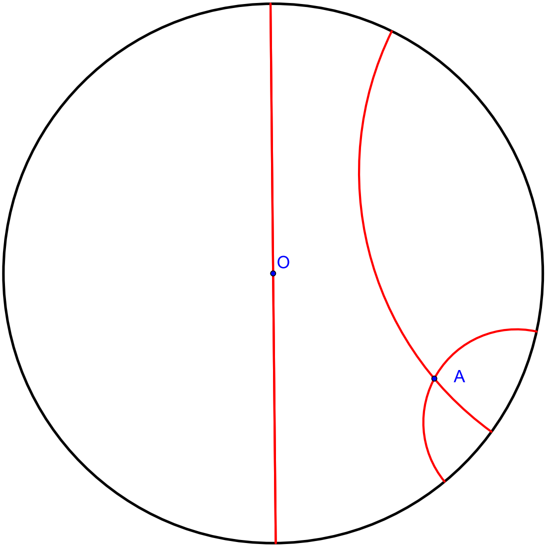
Piano cartesiano è un modello del piano euclideo

- Punto: coppia ordinata di numeri reali (x, y).
- Piano: insieme delle coppie ordinate di numeri reali.
- Retta: luogo dei punti che soddisfano un'equazione lineare ($y = mx + q$ oppure $x = k$).

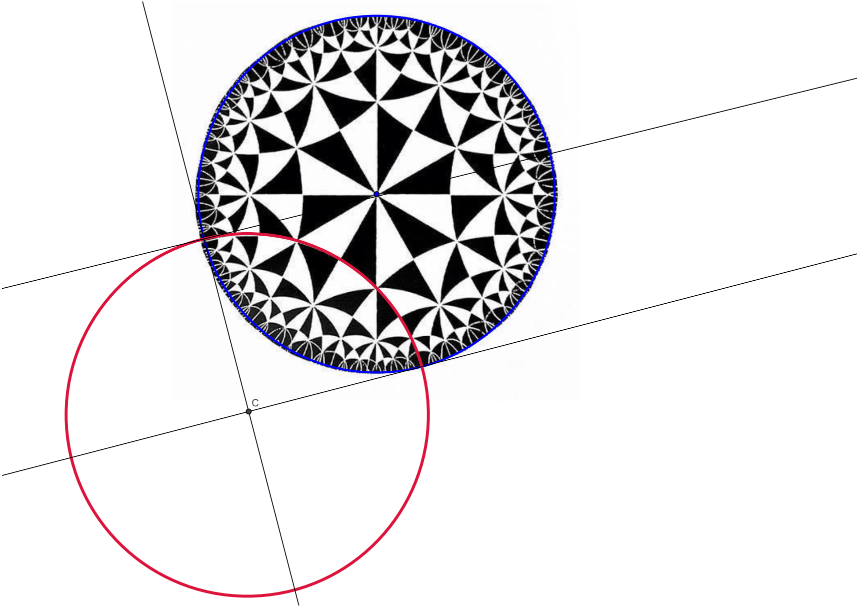
Il disco di Poincaré è un modello del piano iperbolico

- Punti: punti interni a una circonferenza fissata del piano cartesiano.
- Piano: disco di Poincaré = il cerchio fissato, circonferenza esclusa
- P-rette: archi di circonferenze ortogonali alla circonferenza data, oppure diametri.

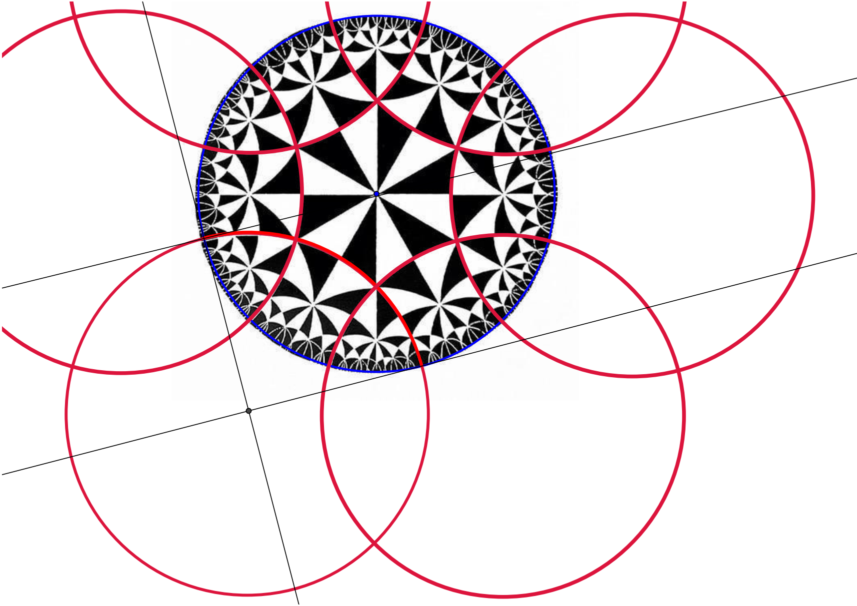
Il disco di Poincaré



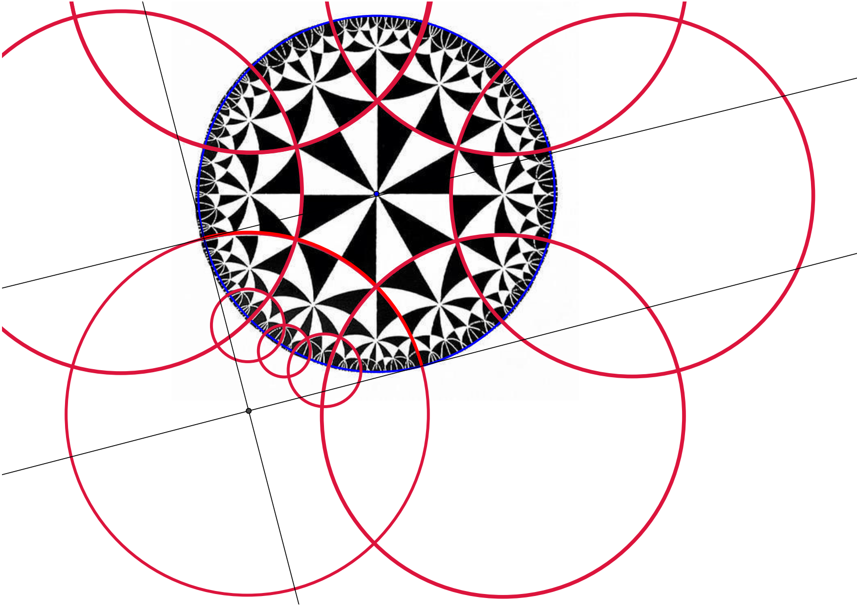
Escher studia Coxeter - Vedi file 1 geogebra



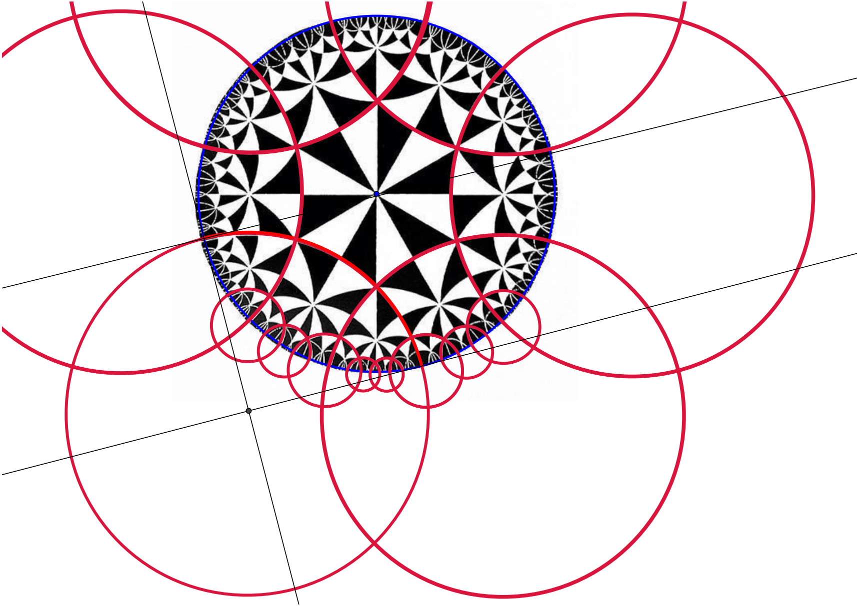
Escher studia Coxeter - Vedi file 1 geogebra



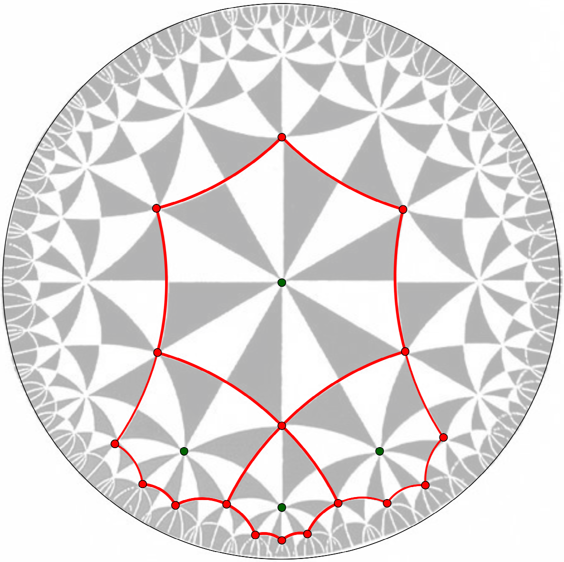
Escher studia Coxeter - Vedi file 1 geogebra



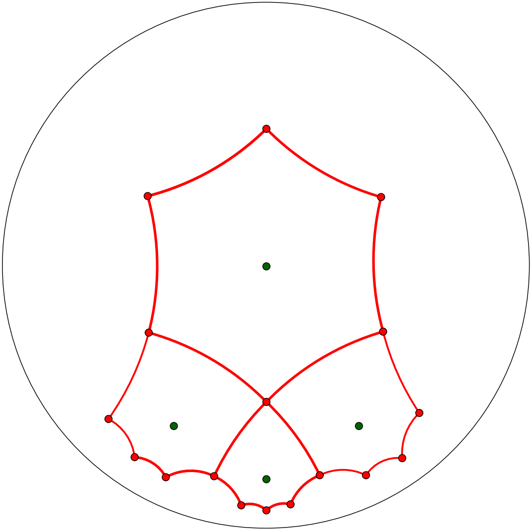
Escher studia Coxeter - Vedi file 1 geogebra



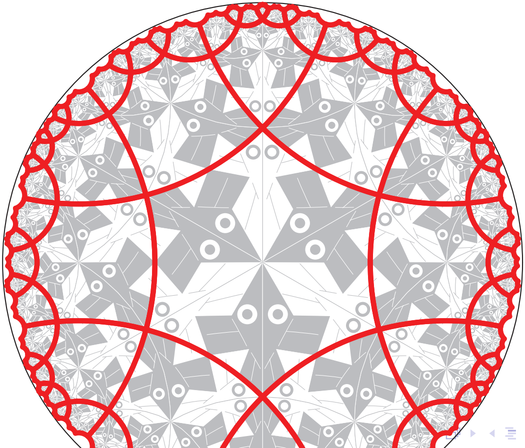
Tassellazione figura 7



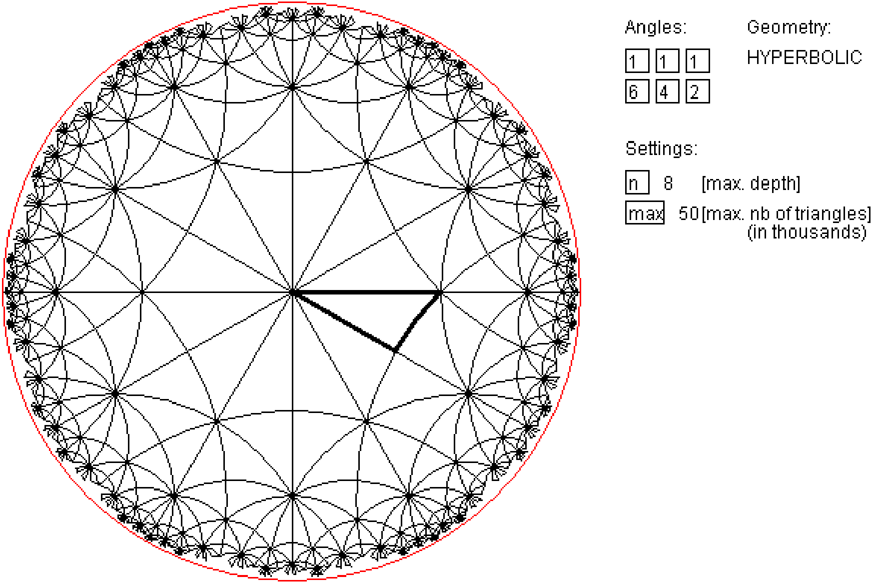
Tassellazione $\{6, 4\}$



The Regular Tessellation $\{6, 4\}$



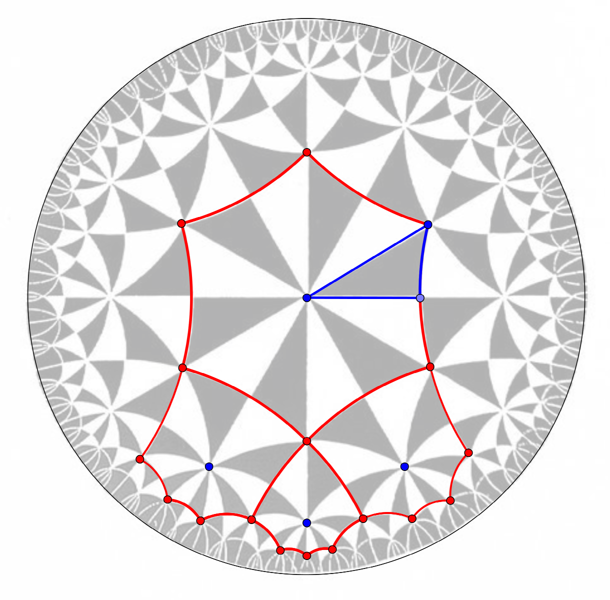
Applet sul web



Poligoni e angoli della tassellazione

- Figura 7 di Coxeter = tassellazione del disco di Poincaré mediante esagoni regolari.
- Gli esagoni sono tutti congruenti; gli angoli interni misurano 90^0.
- Ogni esagono è composto da 12 triangoli rettangoli congruenti.
- Angoli acuti triangoli rettangoli: 30^0 e 45^0.

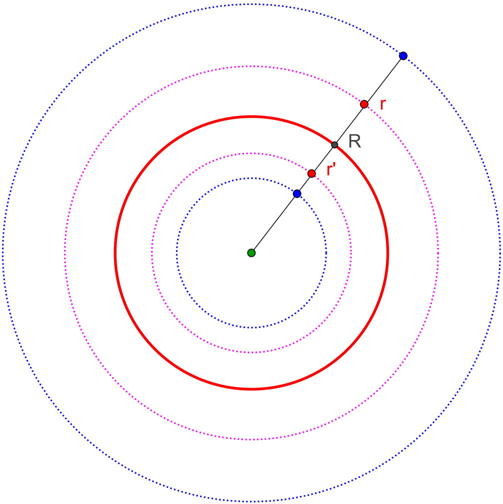
Tassellazione figura 7



Inversione circolare

INVERSIONE CIRCOLARE RISPETTO CIRCONFERENZA ROSSA

$r' = R^2/r$

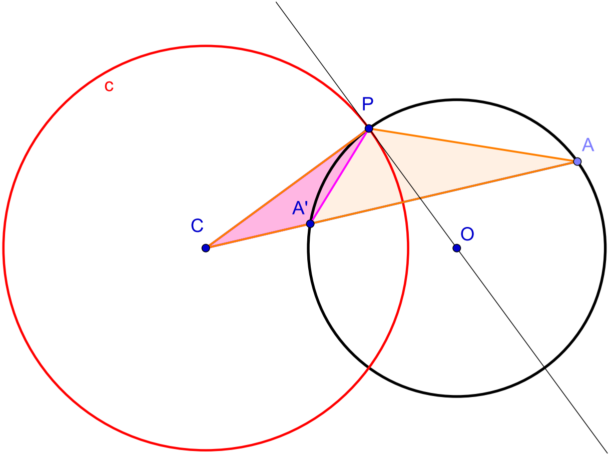


Dettagli tecnici

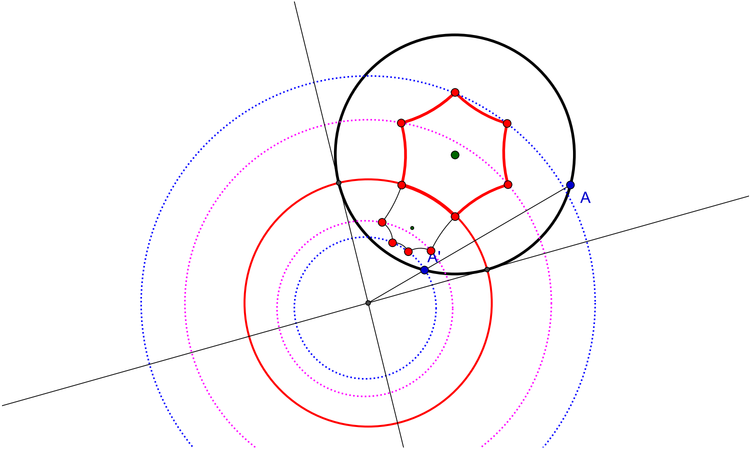
A' inverso di A rispetto circonferenza rossa c

Una circonferenza per A è ortogonale a c se e solo se passa per l'inverso A'

Motivo: $CP^2 = CA\, CA'$ se e solo se CP è tangente a circonferenza nera



Riflessione esagono centrale della figura 7- Geogebra file 2



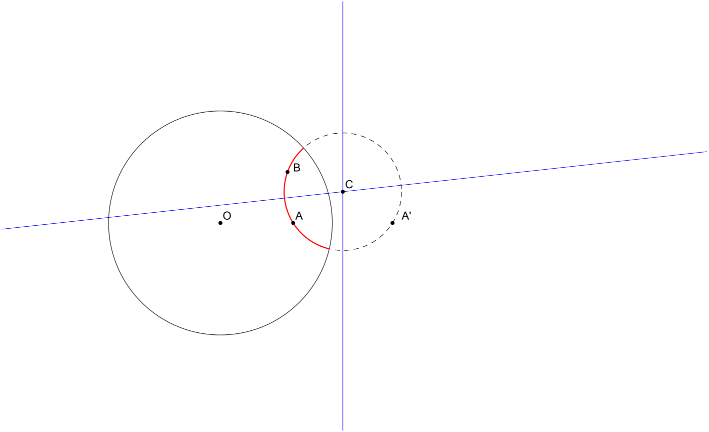
Geometria piana: assiomi di incidenza Hilbert 1899

- Per due punti distinti del piano passa una e una sola retta.

- Ogni retta contiene almeno due punti distinti.

- Esistono tre punti del piano che non sono allineati.

Per due punti passa un'unica P-retta - muoverli Geogebra 3



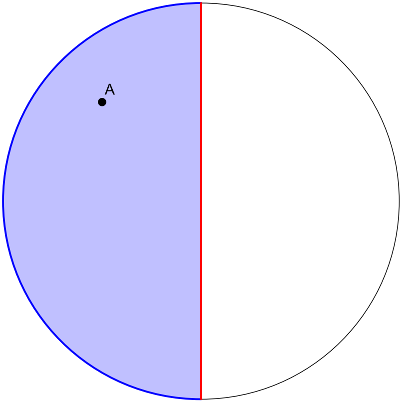
Segmenti congruenti? Angoli congruenti?

- Idea fondamentale: due segmenti sono congruenti se esiste un movimento rigido che porta uno nell'altro.
- Più in generale, due figure si dicono congruenti se esiste un movimento rigido che porta uno nell'altro.
- Esempi: angoli, triangoli, poligoni, ...

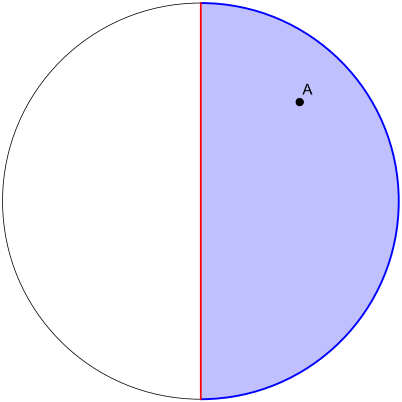
Movimenti rigidi del piano euclideo

- Traslazione $=$ composizione due riflessioni con assi paralleli.
- Rotazione $=$ composizione due riflessioni con assi incidenti.
- Ogni movimento rigido del piano euclideo $=$ composizione di numero finito di riflessioni (ne bastano tre).

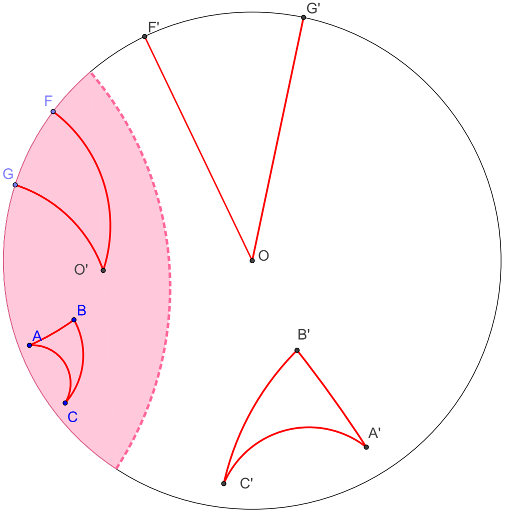
Riflessioni del disco di Poincaré 1



Riflessioni del disco di Poincaré 1



Riflessioni del disco di Poincaré 2



Movimenti rigidi del disco di Poincaré

- Movimento rigido del disco di Poincaré $=$ composizione di numero finito di riflessioni (ne bastano tre).
- Movimento rigido manda P-rette in P-rette.
- Movimento rigido preserva gli angoli euclidei.

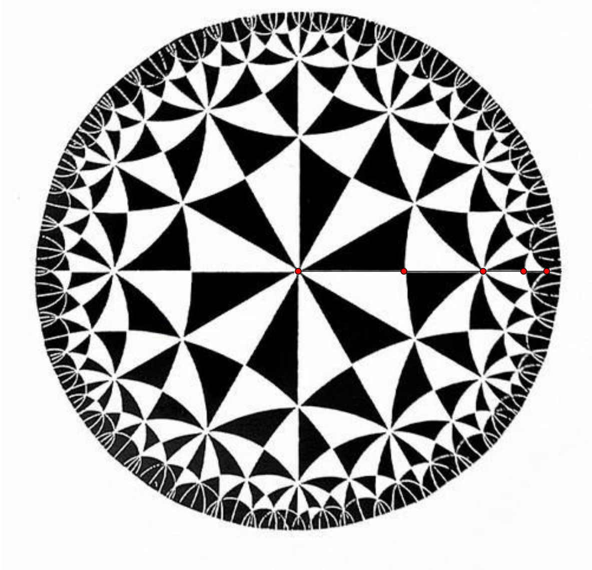
Congruenza nel disco di Poincaré

- Due figure nel disco di Poincaré si dicono congruenti se esiste un movimento rigido che porta l'una nell'altra.

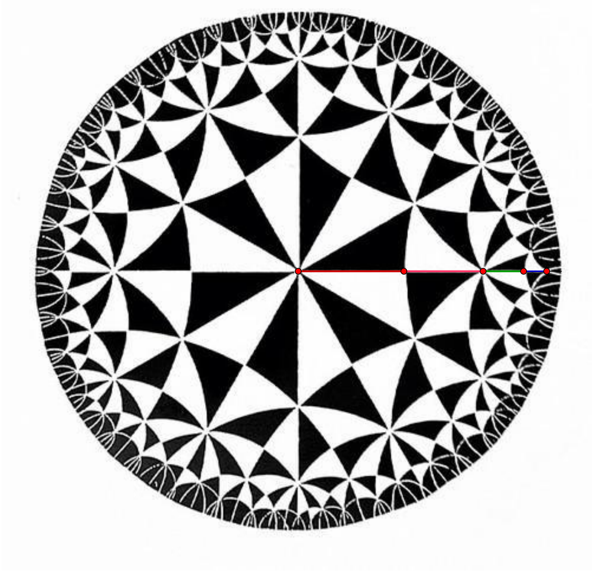
- Nel disco di Poincaré, congruenza per gli angoli coincide con nozione euclidea.

- Il disco di Poincaré non è però in scala: il metro iperbolico si raffredda e si accorcia man mano che ci si allontana dal centro.

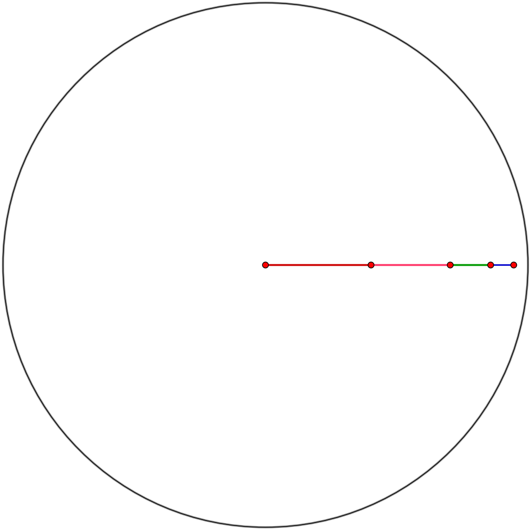
Nel disco oggetti congruenti appaiono sempre più piccoli man mano che ci si allontana dal centro



Nel disco oggetti congruenti appaiono sempre più piccoli man mano che ci si allontana dal centro



Nel disco oggetti congruenti appaiono sempre più piccoli man mano che ci si allontana dal centro



Per la versione online

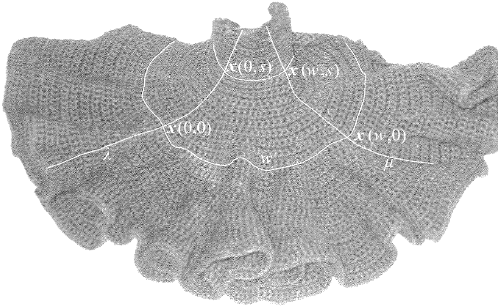
Se prendiamo la circonferenza di raggio 1 e centro origine nel piano cartesiano, i punti del disco di Poincaré sull'asse x sono quelli con ascissa compresa tra -1 e 1. Se si normalizza la metrica iperbolica in modo da avere curvatura -1, la distanza dall'origine del punto $(x, 0)$ è

$$\log\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right);$$

tale distanza tende a $+\infty$ per $x \to 1^-$: il bordo del disco è a distanza infinita; riflettendo come nelle slides precedenti un metro lungo l'asse x non si raggiunge in un numero finito di passi il bordo.

Piano iperbolico troppo grande per lo spazio euclideo

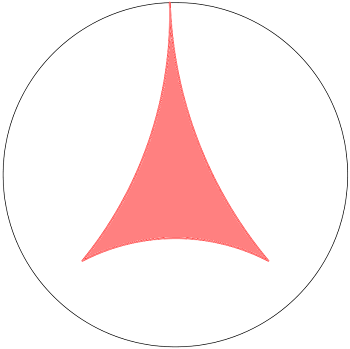
http://www.math.cornell.edu/ dwh/papers/crochet/crochet.html



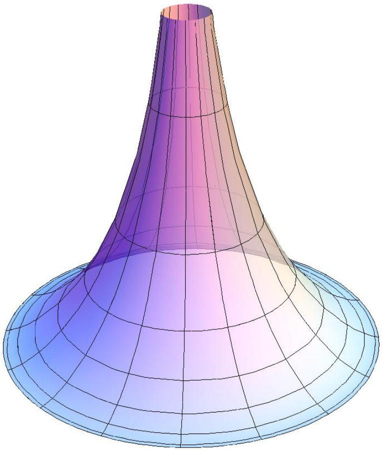
Didascalia slide successive per versione online

Non è possibile rappresentare il piano iperbolico in scala come superficie nello spazio euclideo. E' possibile però rappresentarne in scala una porzione, per esempio il triangolo della prossima slide, coi lati infiniti incollati; la superficie che rappresenta il triangolo iperbolico è nota come pseudosfera. Analogia: un cilindro è una rappresentazione in scala del piano euclideo, ottenuta considerando una striscia del piano delimitata da due rette verticali e una orizzontale e incollando le due rette verticali.

Triangolo iperbolico rappresentabile in scala in $\mathbb{R}^3$



Superficie nello spazio: pseudosfera



Geometria piana: assiomi di congruenza

- Trasporto di segmenti
  Dati due punti A e B e una semiretta ℓ uscente da un punto C, esiste un punto D su ℓ tale che $AB \equiv CD$.

- Transitività
  Se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, allora $AB \equiv EF$.

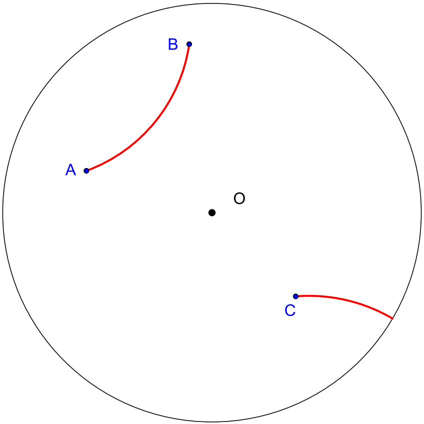
- Additività
  Se $B \in AC$ e $B' \in A'C'$ e $AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$, allora $AC \equiv A'C'$

- Assiomi analoghi per congruenza angoli (include SAS).

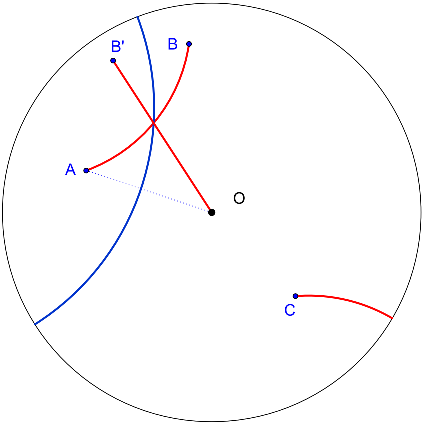
Spiegazione slide successiva per versione online

Le due P-rette blu sono gli assi dei P-segmenti AO e OC. Riflettere prima la semiretta uscente da C in una semiretta uscente da O (quella su cui apparirà B''). Riflettere AB rispetto all'asse di AO per ottenere OB'. Ruotare (due riflessioni) OB' per ottenere OB''. Riflettere OB'' rispetto all'asse di AO per ottenere CD.

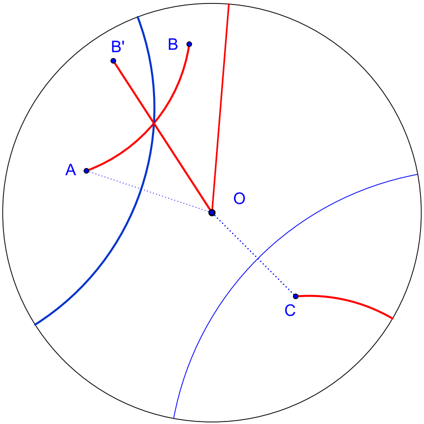
Congruenza nel disco di Poincaré verifica assiomi: trasporto



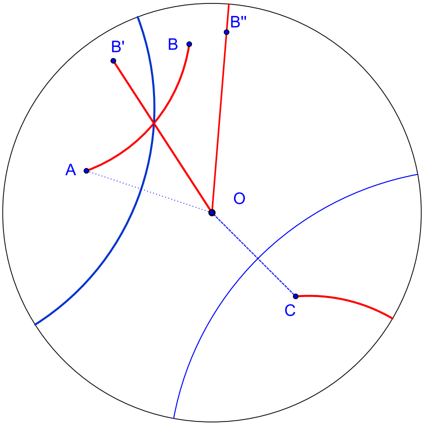
Congruenza nel disco di Poincaré verifica assiomi: trasporto



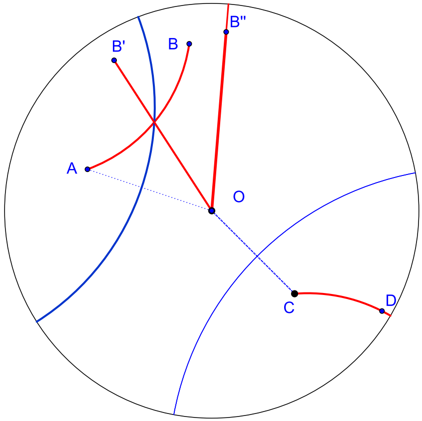
Congruenza nel disco di Poincaré verifica assiomi: trasporto



Congruenza nel disco di Poincaré verifica assiomi: trasporto



Congruenza nel disco di Poincaré verifica assiomi: trasporto



Commento per versione online

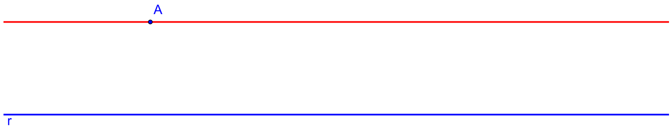
Il disco di Poincaré è omogeneo (tutti i suoi punti sono equivalenti, perché posso portare un punto qualsiasi nell'origine mediante un movimento rigido) e isotropo (tutte le direzioni sono equivalenti)

Conseguenze

- Tutto ciò che si dimostra utilizzando assiomi di incidenza, ordinamento e congruenza vale sia nel piano cartesiano sia nel disco di Poincaré.
- Criteri congruenza triangoli. Teoremi sui triangoli isosceli.
- Teorema dell'angolo esterno di un triangolo (è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti)
- In ogni triangolo la somma di due lati è maggiore del terzo: segmenti minimizzano distanze.

Assioma delle parallele per il piano euclideo: figura

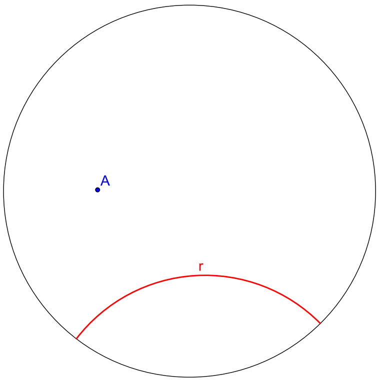
Assioma delle parallele per il piano euclideo: figura



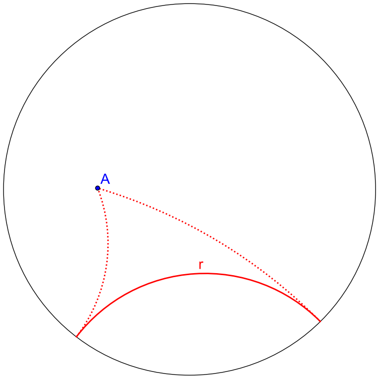
Assioma delle parallele per il piano euclideo

- Dati un punto A e una retta r, esiste un'unica retta per A parallela a r.
- Rette parallele: (a) senza punti in comune (b) stessa direzione (c) equidistanti.
- Equivale a richiedere: la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.

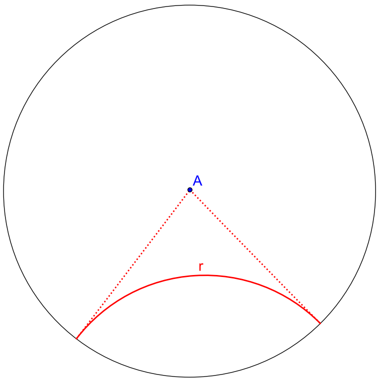
Assioma delle parallele per il piano iperbolico: figura



Assioma delle parallele per il piano iperbolico: figura



Assioma delle parallele per il piano iperbolico: figura



Assioma delle parallele per il disco di Poincaré

- Due P-(semi)rette si dicono parallele se si incontrano sul bordo del disco.
- Due P-(semi)rette parallele non hanno punti in comune oppure coincidono.
- Assioma (L): dati un punto A e una P-retta r non passante per A, esistono due semirette a e b uscenti da A, non giacenti su una stessa retta, parallele a r.

Triangoli iperbolici

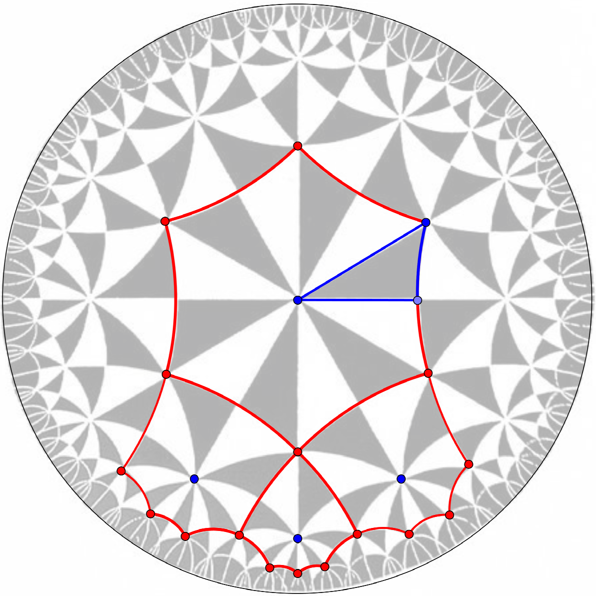
- Due P-triangoli sono congruenti se e solo se hanno gli angoli congruenti.

- La somma degli angoli interni di un P-triangolo è minore di un angolo piatto.

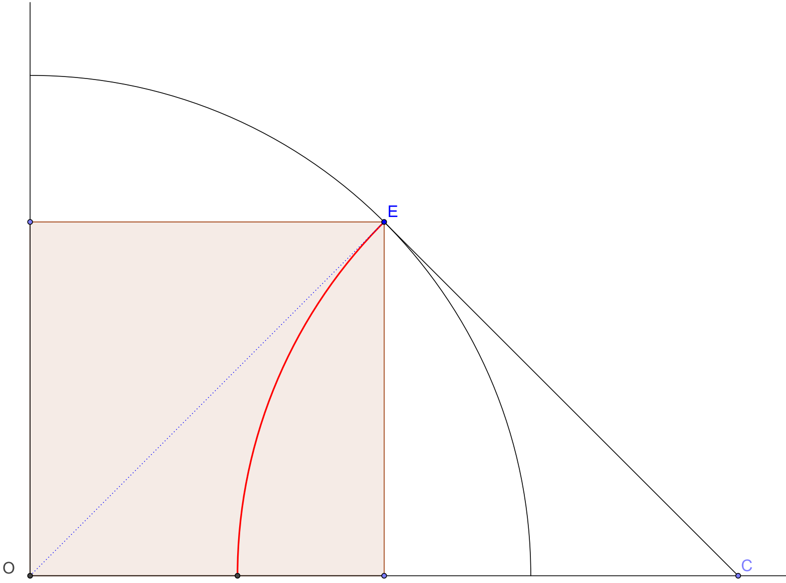
- Si ottiene teoria dell'area ponendo

$$\text{area}(T) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

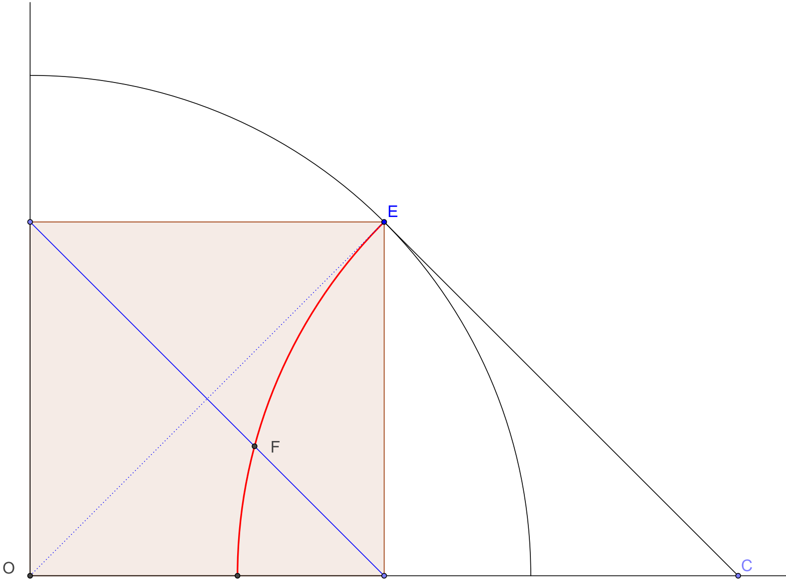
Triangoli della figura 7



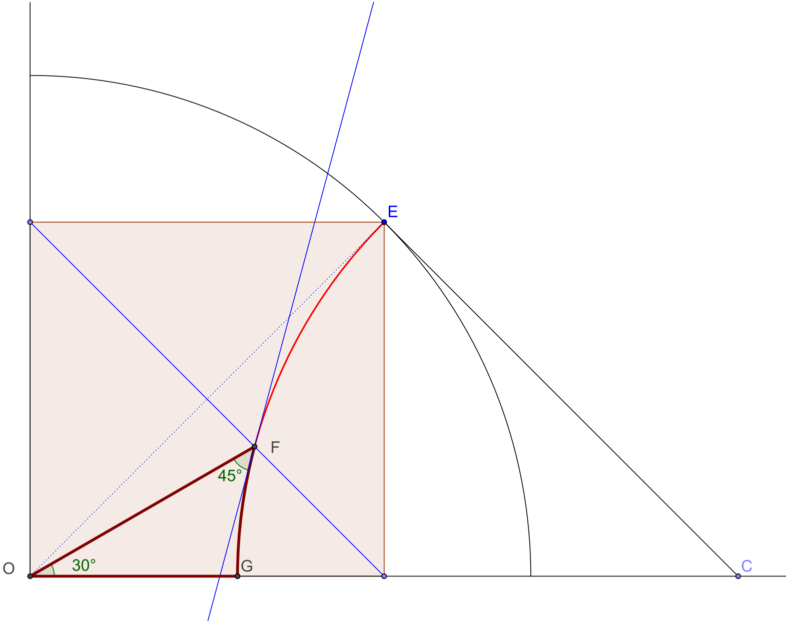
Triangolo con angoli 30^0, 45^0, 90^0



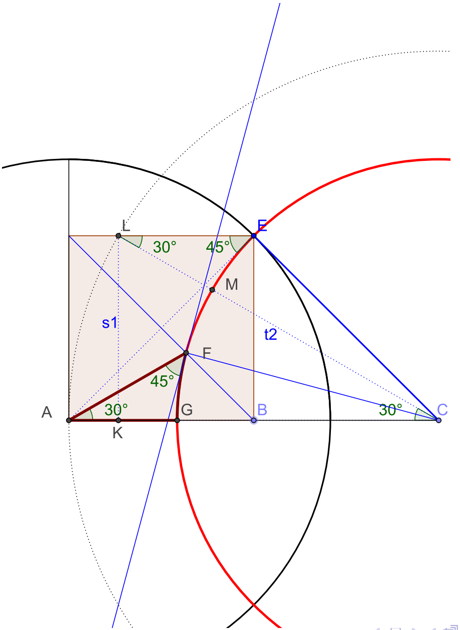
Triangolo con angoli 30^0, 45^0, 90^0



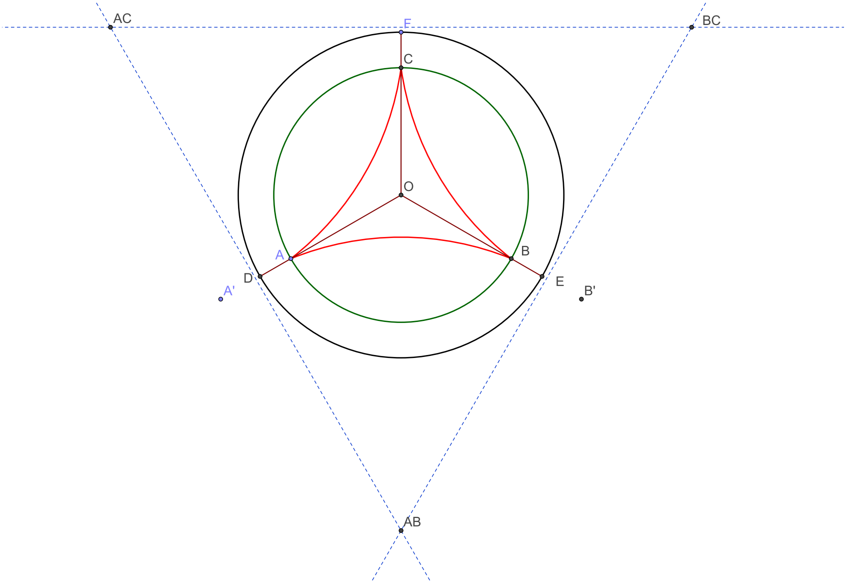
Triangolo con angoli 30^0, 45^0, 90^0



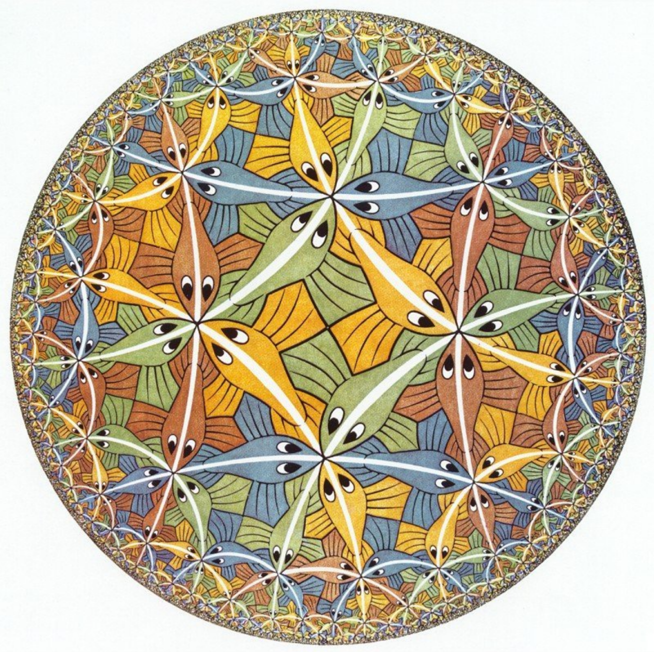
Spiegazione



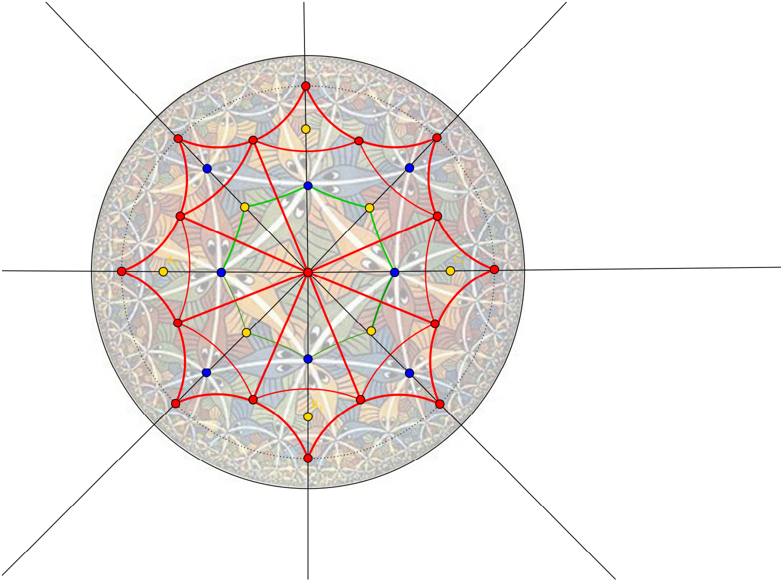
Triangoli equilateri



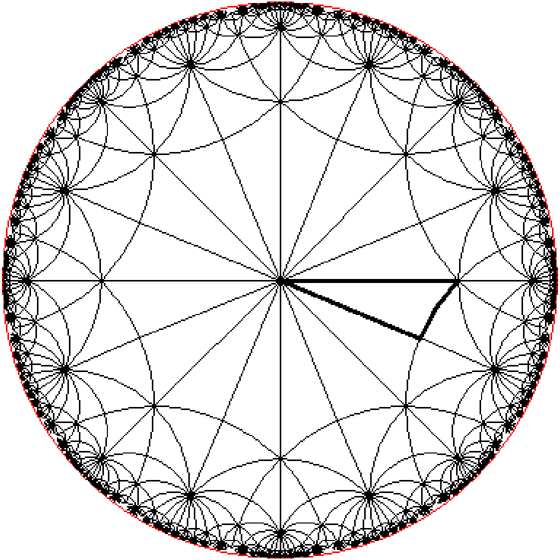
Escher: Circle limit III



Ottagoni regolari



Applet sul web



Angles: Geometry:

1/8 1/4 1/2 HYPERBOLIC

Settings:

n 8 [max. depth]

max 50 [max. nb of triangles] (in thousands)

3D