



*La teoria
martolemaica*

Autori: *Anna Lisa Frau, Clizia Micheletti, Carlo Pasquinucci*

Scuola: *Liceo Scientifico Statale "Elio Vittorini", Milano*

Docente di riferimento: *Prof. Giancarlo Brusa*

Sito internet: *www.martolomeo.com*



0 Indice

- Introduzione	pag. 1
- Cenni storici	pag. 2
- Notizie su Marte e i suoi satelliti	pag. 3
- Esperimento	pag. 5
- Commento	pag. 6
- Risultati	pag. 7
- Ipotesi	pag. 8
- Prospettive future	pag. 9
- Fonti	pag. 10

1 Introduzione

Il 2009 è stato proclamato, dall'Assemblea Generale delle Nazioni Unite, *Anno Internazionale dell'Astronomia* (IYA2009) in quanto ricorre in quest'anno il quarto centenario della pubblicazione da parte di Keplero delle prime due leggi del moto dei pianeti contenute nell'*Astronomia Nova* e delle prime osservazioni astronomiche effettuate col cannocchiale da Galileo a Padova.

Lo spirito del presente lavoro è stato l'invito dell'Istituto Nazionale di Astrofisica (INAF) a riscoprire il nostro posto nell'Universo e il senso profondo dello stupore e della scoperta, che è la fonte di ispirazione essenziale di ogni scienziato.

Lo scopo di questo progetto è di rielaborare una teoria astronomica come avrebbe potuto fare un astronomo marziano con la tecnologia di epoca tolemaica. Abbiamo immaginato di essere gli aiutanti di questo astronomo, che abbiamo chiamato "Martolomeo".

Abbiamo scelto di "abitare" su Marte in quanto tale pianeta presenta caratteristiche fisiche simili a quelle terrestri. Inoltre, l'Agenzia Spaziale Europea (ESA) sta progettando per il 2030 la prima missione umana sul pianeta rosso e alcuni scienziati sostengono che, in un prossimo futuro, potrà essere un buon candidato per la "terraformazione", cioè il processo artificiale atto a rendere abitabile per l'uomo un pianeta e la colonizzazione umana.

Marte, inoltre, nel corso dei vari esperimenti scientifici attraverso sonde e satelliti, è sempre stato il pianeta di maggior interesse per gli astronomi. Dagli anni '60 ad oggi, sono state effettuate 40 missioni sia americane che russe e l'ultima sonda, Phoenix, è atterrata nei pressi del Polo Nord di Marte il 25 maggio 2008 e si è conclusa il 10 novembre.

Siamo partiti da osservazioni del moto degli astri effettuate da Marte ogni dieci giorni a partire dal 1 gennaio 2009 al 27 dicembre 2010; abbiamo delimitato il nostro campo di studio alle orbite del Sole, dei pianeti terrestri ed interni a Marte, Mercurio, Venere e Terra e dei due satelliti marziani Phobos e Deimos.

Per raggiungere il nostro scopo ci siamo serviti delle teorie elaborate dai più importanti astronomi terrestri (Tolomeo, Copernico, Brahe, Keplero) e abbiamo utilizzato dei programmi di facile accesso di calcolo matematico e simulatori astronomici (Celestia, Cabrè Géomètre II Plus, Derive 6, Office).

Abbiamo potuto contare sull'aiuto della dr.ssa Monica Sperandio e del dott. Michele Bossi dell'Osservatorio Astronomico di Brera, nonché sull'incoraggiamento del prof. Marco Bersanelli, docente di Astronomia presso la Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali dell'Università degli Studi di Milano.

Il sito internet www.martolomeo.com è stato curato dal nostro amico Umberto Gardini.

2 Cenni storici

2.1 Il sistema tolemaico degli epicicli

Tolomeo, nel prologo della sua opera principale, l'*Almagesto*^[1], afferma di non essere interessato ad indagare il vero sistema fisico dell'Universo, ma di voler elaborare un modello matematico attraverso il quale prevedere il moto dei pianeti. Aggiunge inoltre di privilegiare, fra due modelli geometrici che appaiono equipotenti a spiegare un fenomeno osservato, quindi sulla base di ragioni esclusivamente matematico-geometriche quello che meglio si accorda con la fisica di Aristotele e col senso comune. Per il moto di ciascun corpo celeste egli ideò delle leggi in grado di descrivere e prevedere con notevole precisione i moti osservabili. Per ottenere questo risultato, Tolomeo introdusse una serie di accorgimenti matematici che, non solo spiegavano le irregolarità dei moti dei pianeti, ma consentivano anche di prevederne le posizioni con un alto grado di precisione. Per giustificare l'apparente moto non uniforme del Sole, Tolomeo ipotizzò che si muovesse su un cerchio centrato in un punto differente dalla Terra chiamato *eccentrico* e che le velocità angolari dovessero essere calcolate ponendo il vertice nel suo simmetrico rispetto alla Terra, chiamato *equante*. Era un metodo complesso per descrivere un'orbita ellittica.

Il moto relativo di ciascun pianeta è il prodotto del moto di due circonferenze: una detta *epiciclo*, l'altra *deferente*, di raggio maggiore.

L'*epiciclo*, sul quale orbita il pianeta P, ruota uniformemente intorno ad un punto A del *deferente*, a sua volta pensato centrato nell'*eccentrico* e uniformemente ruotante intorno all'*equante*. Il movimento relativo al centro del sistema T corrisponde al movimento del pianeta così come appare a un osservatore terrestre. L'*epiciclo* e il *deferente* ruotano entrambi nella stessa direzione antioraria, che corrisponde per l'osservatore terrestre alla direzione Ovest-Est.

Quando il pianeta, per la rotazione dell'*epiciclo*, si trova all'esterno del *deferente*, il moto dell'*epiciclo* si somma a quello del *deferente*, quindi il pianeta si muove nella direzione Ovest-Est; quando il pianeta si trova all'interno del *deferente*, il moto dell'*epiciclo* si sottrae a quello del *deferente*, e il pianeta si muove nella direzione Est-Ovest.

Questo modello giustifica il fenomeno di retrogradazione dei pianeti osservato dalla Terra.

Tolomeo, per sviluppare questa teoria, prese in considerazione soltanto le coordinate angolari degli astri e non le variazioni (all'epoca difficilmente misurabili) delle loro distanze dall'osservatore.

Questo sistema entrò in crisi con l'invenzione del cannocchiale e quindi grazie ad una maggiore accuratezza nelle osservazioni e con la scoperta delle lune di Giove da parte di Galileo.

2.2 Il sistema tychonico e kepleriano

L'astronomo danese cinquecentesco Tycho Brahe nel 1588 sviluppò una nuova teoria pubblicata nel trattato *De mundi aetherei recentioribus phaenomenis*.

Secondo il sistema tychonico, la Terra era immobile al centro dell'Universo, la Luna e il Sole ruotavano intorno alla Terra, mentre i restanti pianeti ruotavano intorno al Sole.

Nel 1599, Tycho Brahe offrì al giovane Keplero un posto come suo assistente e nel 1601, quest'ultimo, gli succedette come matematico e astronomo imperiale.

Keplero si proponeva di ricostruire con la massima precisione l'orbita dei pianeti intorno alla Terra, o intorno al Sole, in quanto da un punto di vista della relatività dei moti si sapeva essere la stessa cosa.

Voleva poi verificare se il sistema sviluppato da Tycho Brahe fosse in realtà più adatto a descrivere il cosmo dell'antico sistema geostatico di Tolomeo e del più recente sistema eliocentrico di Copernico.

La questione aperta rimaneva il moto di Marte, che, con i sistemi astronomici precedenti, non riusciva ad essere descritta in modo coerente con le osservazioni.

L'astronomo si dedicò allo studio del moto di questo pianeta, usando le osservazioni particolarmente accurate di Tycho. L'astronomo tedesco, nel 1602, dopo aver riempito letteralmente migliaia di pagine di calcoli algebrici, intraprendendo quella che lui stesso definì "la mia guerra con Marte", arrivò a stabilire quella che oggi è nota come la seconda legge di Keplero. Tre anni dopo, sempre studiando il pianeta rosso, stabilì la prima legge.

[1] In arabo *La più grande*, il titolo originale greco era *Mathematiké syntaxis* ("Trattato matematico")

Entrambe le leggi furono pubblicate nell'*Astronomia Nova*.

3 Notizie su Marte e i suoi satelliti

3.1 Marte (♂)

Marte è il quarto pianeta del Sistema Solare ed è soprannominato "pianeta rosso" per il suo caratteristico colore dovuto all'ossido di ferro, che abbonda sulla sua superficie. Il simbolo astronomico del pianeta è la rappresentazione stilizzata dello scudo e della lancia del dio (♂).

La sua crosta ha uno spessore maggiore di quella terrestre ed ha una composizione chimica simile, ma contiene due volte meno silicio e tre volte più ferro.

Dal punto di vista morfologico, Marte può essere suddiviso in due grandi regioni: l'emisfero sud è geologicamente più antico, caratterizzato da altopiani e crateri a fondo piatto, mentre l'emisfero nord è di formazione più recente e dominato dalla regione del massiccio di Tharsis, ricca di vulcani, ormai spenti.

Si pensa che tra tutti i pianeti, ad eccezione della Terra, Marte sia quello il cui nucleo interno si sia raffreddato più lentamente e questo abbia permesso la formazione di strutture superficiali fino ad epoche molto recenti.

I monti di Marte sono di origine vulcanica ed il più elevato è il Monte Olympus, che raggiunge i 27 km di altezza. Il suolo di Marte è ricoperto da una moltitudine di rocce e da uno strato di sabbia profondo qualche centimetro.

Caratteristiche di Marte sono le sue calotte polari, che sono depositi stratificati di anidride carbonica e sabbia. Possiede, inoltre, antichi letti fluviali disseccati con evidenti segni di erosione datati circa 4 miliardi di anni. Sembra che in passato possano esserci state abbondanti quantità d'acqua in forma liquida; attualmente si pensa che l'acqua sia intrappolata nel sottosuolo gelato del pianeta sotto forma di permafrost, cioè di terreno gelato.

Malgrado la scarsissima densità atmosferica, Marte è spazzato da fortissimi venti, che provocano delle vere e proprie tempeste di sabbia, in grado di oscurarne anche per mesi la superficie.

Nell'atmosfera si muovono delle nubi di colore giallastro, vortici di sabbia sollevati dai venti che possono arrivare fino ad altezze di 50 km. Inoltre, si trovano nubi di colore blu, localizzate tra 10 e 20 km di altezza dal suolo, composte di cristalli di ghiaccio.

L'atmosfera rarefatta ha una piccola inerzia termica, ossia una bassa capacità di trattenere il calore, perciò l'escursione termica giornaliera è di circa 60 gradi.

Durante la grande opposizione^[2] del 1877, l'astronomo milanese Giovanni Schiaparelli vide sulla superficie del pianeta una fitta rete di strutture lineari che chiamò "canali".

Questa parola venne tradotta erroneamente in inglese con il termine *canals* invece del più corretto *channels*; mentre la prima parola indica una costruzione artificiale, la seconda indica correttamente una conformazione del terreno che può essere anche naturale. Da questo errore derivarono le varie supposizioni circa la vita su Marte.

In realtà, le striature non sono altro che un effetto ottico e le loro variazioni stagionali nell'aspetto sono dovute al deposito e allo spostamento di sabbia sotto l'azione dei forti venti.

Fino al 1965, Marte appariva all'osservazione astronomica addirittura come un mondo coperto da oceani e continenti, proprio come la Terra, sul quale sarebbe stato possibile trovare la vita.

La missione del Mariner 4 confutò queste teorie, mostrandoci un pianeta desertico e arido. Gli esperimenti di carattere chimico-biologico compiuti dalle sonde Viking, per accertare la possibilità di vita su Marte, hanno dato esiti contrastanti. Un esperimento produsse una possibile prova di vita, ma non fu confermato da altri.

Nel 2008, la sonda Phoenix Mars Lander, sviluppata dalla NASA per l'esplorazione del pianeta Marte, ha studiato l'ambiente intorno al Polo Nord marziano, per verificare la possibilità di esistenza di vita microbiche e per studiare l'eventuale presenza di acqua nell'ambiente.

^[2] Opposizione: allineamento di un corpo celeste con Terra e Sole.

Grande opposizione: opposizione in cui il corpo celeste si trova al suo perelio e quindi la sua distanza dalla Terra diviene la minima possibile. Il periodo di quelle marziane è di circa 14 anni, l'ultima è avvenuta nel 2003, la prossima nel 2017

3.2 I satelliti di Marte

Marte possiede due satelliti chiamati Phobos e Deimos, rispettivamente in greco Φόβος (*paura*) e Δεῖμος (*terrore*) figli del dio della guerra e di Afrodite, citati nel XV libro dell'Iliade.

La loro scoperta risale alle ore 7:48 UTC del 12 agosto del 1877, a opera dell'astronomo statunitense Asaph Hall, dall'Osservatorio Navale di Washington. Curiosamente, la loro presenza era stata ipotizzata già un secolo e mezzo prima dallo scrittore inglese Jonathan Swift, che aveva fatto affermare agli scienziati di *Laputa* (l'isola galleggiante dei *Viaggi di Gulliver*) che Marte possedeva due piccoli satelliti. La stessa cosa affermarono l'abitante di Sirio e quello di Saturno nel libro *Micromega* di Voltaire. È da notare che al tempo di questi scrittori i telescopi non erano abbastanza potenti da poter individuare satelliti così piccoli come Phobos e Deimos, e si tratta quindi, con ogni probabilità, di supposizioni fortunate.

3.2.1 Phobos (Φόβος)

Phobos, il più interno, ed il maggiore dei due satelliti di Marte, orbita ad un'altezza di circa 6000 km, e questa caratteristica lo rende il satellite più vicino al proprio pianeta.

Di forma altamente non sferica, con un diametro medio di 22 km, Phobos è probabilmente un asteroide catturato, ma rimane un mistero su come Marte lo abbia imprigionato in un'orbita quasi perfettamente circolare (e dunque fisicamente improbabile) e piuttosto instabile; ciò fa ipotizzare una cattura relativamente recente.

Phobos è un corpo scuro, ma la sua densità è troppo bassa per poter essere costituito solo da roccia: probabilmente è composto da una miscela di roccia e ghiaccio, oppure cavo.

Le immagini della Mars Global Surveyor indicano che Phobos è ricoperto da uno strato di polvere sottile spesso circa un metro.

Phobos, come la Luna presenta una superficie ricca di crateri, il più grande dei quali è il cratere Stickney, particolarmente visibile.

È stato ipotizzato che Phobos, come Gaspra, Ida, Mathilde ed altri asteroidi che presentano crateri da impatto di notevoli dimensioni, non sia un corpo compatto, ma un agglomerato. Questa struttura interna potrebbe spiegare sia il valore della densità, sia la capacità di resistere ad impatti potenzialmente catastrofici, come quello che ha generato il cratere Stickney.

A causa della vicinanza al pianeta, le forze di marea esercitate da Marte stanno abbassando l'orbita di Phobos ad un ritmo di 1,8 metri al secolo, e in circa 50 milioni di anni, il satellite impatterà contro la superficie di Marte o, più probabilmente, si disintegrerà in un anello planetario. Phobos si trova già all'interno del limite di Roche^[3] di Marte, ma non si è ancora sfaldato perché è mantenuto assieme dalla forza coesiva dei suoi costituenti, piuttosto che dalla gravità. Le stime migliori predicono la sua distruzione quando il raggio dell'orbita scenderà a circa 5000 km.

Visto da Phobos, Marte appare 6400 volte più grande e 2500 volte più brillante della Luna piena vista da Terra, ed occupa un quarto della volta celeste. Visto da Marte, Phobos è grande un terzo della Luna vista da Terra.

Il suo periodo orbitale è di 7 ore 39.2 min.

3.2.2 Deimos (Δεῖμος)

^[3] Il limite di Roche è la distanza minima dal centro di un pianeta, o di una stella al di sotto della quale un satellite, o un pianeta, si può frammentare per effetto delle forze di marea.

Se entrambi i corpi hanno medesima densità, il limite è circa 2,5 volte il raggio del corpo madre.

È possibile che all'interno di tale limite esistano dei satelliti, ma devono essere sufficientemente piccoli, perché le tensioni interne alle rocce impediscano loro di frammentarsi.

Un corpo solido può restare immutato oltre il limite di Roche se le forze di marea non superano la capacità strutturale del

corpo. Questa equazione indica questo limite: $R_L = 2,456R\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}$

dove: ρ' = densità del pianeta, ρ = densità del satellite, R = raggio del pianeta.

Deimos con un diametro medio di 10km, è il minore ma il più lontano dei due satelliti naturali di Marte. L'origine del satellite è ancora incerta: la stretta somiglianza tra Deimos e i tanti pianetini presenti nella fascia principale degli asteroidi suggerirebbe che un corpo celeste di quel tipo sarebbe stato catturato dalla gravità marziana per opera di una perturbazione causata dal passaggio di Giove. Questa spiegazione risulta però molto improbabile, poiché la forma dell'orbita del satellite è troppo regolare e posta su un piano quasi coincidente con quello equatoriale del pianeta rosso. La disputa rimane accesa.

Deimos è composto da rocce ricche di carbonio e ghiaccio.

Visto da Deimos, Marte appare 1000 volte più grande e 400 volte più brillante della Luna piena vista dalla Terra, e riempie 1/11 della volta celeste.

Visto da Marte, Deimos ha un diametro angolare di non più di 2,5' e ad occhio nudo appare simile ad una stella; al massimo della sua luminosità (l'equivalente della Luna piena) appare brillante come Venere visto dalla Terra.

Il suo periodo orbitale è pari a circa 30,28 ore.

4 Esperimento

4.1 Premessa

Per il nostro esperimento abbiamo utilizzato alcuni software sia specialistici che scolastici:

Cabri Géomètre II Plus è un programma per fare geometria su un computer. Oggi si è giunti alla versione II e, nel frattempo, è diventato il software più diffuso nelle scuole superiori di tutto il mondo. Il programma permette di costruire con "riga e compasso" figure geometriche del piano. Le relazioni tra gli oggetti definite dalla costruzione si conservano muovendo i punti base della costruzione; questo permette di esplorare graficamente le proprietà geometriche degli oggetti della costruzione. È possibile utilizzarlo gratuitamente per 30 giorni, scaricandolo dal sito ufficiale www.cabri.com.

Derive 6 è un potente programma per risolvere espressioni matematiche avanzate. Con questa applicazione è possibile studiare e risolvere i problemi tipici della trigonometria, dello studio di funzione, dell'algebra lineare e dell'analisi. Derive è, inoltre, in grado di disegnare grafici bidimensionali e tridimensionali, permettendo ad esempio di confrontare l'andamento di una funzione al variare dei parametri. È possibile utilizzarlo gratuitamente per 30 giorni, scaricandolo dal sito ufficiale www.derive.it.

Celestia è un ottimo simulatore 3D di tutti gli oggetti celesti ad oggi conosciuti, poiché contiene un database di oltre 100.000 stelle. Offre la possibilità di "catturare" le immagini visualizzate e di memorizzarle anche all'interno di un file video. Cliccando su ogni corpo celeste vengono visualizzati nome, diametro dei pianeti, luminosità delle stelle, distanza dalla quale state osservando il corpo, classe di appartenenza e altre informazioni.

Inoltre usando lo zoom si può arrivare a contatto con ogni pianeta o stella, oppure allontanandosi, vedere le orbite. È un programma scaricabile gratuitamente dal sito <http://celestia.softonic.it>.

Abbiamo delimitato il campo di studio al Sole, ai pianeti terrestri ed interni a Marte, Mercurio, Venere e Terra e ai due satelliti marziani Phobos e Deimos.

Abbiamo effettuato le osservazioni ogni dieci giorni a partire dal 1 gennaio 2009 fino al 27 dicembre 2010.

Dovendo usare un simulatore e non potendo, per ovvi motivi, effettuarle direttamente da Marte, non abbiamo potuto prendere l'altezza^[4] dei corpi celesti e quindi abbiamo seguito il movimento degli astri lungo l'eclittica.

^[4] L'altezza, o elevazione, è la distanza angolare dall'orizzonte di un punto sulla sfera celeste, calcolata come positiva se rivolta verso lo Zenit, e negativa se rivolta verso il Nadir. È una delle due coordinate del sistema di coordinate orizzontali, è l'angolo formato con l'orizzonte dalla semiretta che unisce l'osservatore al corpo celeste.

La differenza fra le nostre osservazione effettuate per mezzo di un simulatore e quelle effettuabili da Marte, è trascurabile, in quanto non potrebbero esserci grandi errori dovuti alla rifrazione, poiché l'atmosfera marziana è piuttosto rarefatta.

4.2 Schema esperimento

- 1) Aprire il programma "Celestia"
Andare su Marte
 - ↳ *Tasti di scelta rapida [H][4][G]*Centrare in Marte
 - ↳ *Navigazione, Centra la selezione*Andare sul Polo Nord eclittico
 - ↳ *Cliccare col tasto destro su Marte*
 - ↳ *Selezionare Vettori di Riferimento*
 - ↳ *Assi dei Bordi*
 - ↳ *Ruotare Marte, tenendo premuto il tasto destro, fino a posizionarsi sull'asse Zeta degli Assi dei Bordi.*Stabilire un fov, ossia l'angolo visivo, e una distanza comune per tutto l'esperimento
 - ↳ *Per modificare il fov, utilizzare i tasti [,] e [.]*
 - ↳ *Per modificare la distanza, usare il tasto centrale del mouse*Fotografare la situazione
 - ↳ *Selezionare Cattura immagine nel menù file*Catturare e salvare le foto in diverse date
 - ↳ *Selezionare Imposta ora dal menù Tempo*
- 2) Aprire "Cabri Géomètre II Plus"
Mettere una foto per file come sfondo
 - ↳ *Cliccare col tasto destro del mouse*
 - ↳ *Selezione immagine da sfondo*
 - ↳ *Da file*Prendere un'asse di riferimento
 - ↳ *Tracciare una semiretta uscente da Marte*Sovrapporre un punto su ogni corpo del sistema solare
 - ↳ *Inserire punto dal menù Strumenti*Misurare l'angolo compreso dalla semiretta e dai corpi del sistema solare e con il vertice in Marte
 - ↳ *Selezionare misura dell'angolo dal Menu Strumenti*
 - ↳ *Selezionare la semiretta, il punto coincidente con Marte e quello col corpo di cui si vuole misurare la posizione*(Attenzione, gli angoli superiori a 180° vengono misurati in senso antiorario in valore assoluto)
- 3) Aprire "Excel"
Inserire le date e le relative posizioni dei corpi e calcolare le velocità angolari.
Per visualizzare meglio i dati, costruire grafici e BoxPlot

5. Commento ai dati e unità di misura

Osservando i dati, nei grafici e soprattutto nei BoxPlot^[5], abbiamo notato che alcuni di essi si allontanano in maniera significativa dall'andamento generale, quindi, probabilmente, in questi casi, ci sono stati degli errori nella cattura dei dati o delle eccessive approssimazioni nei calcoli.

^[5] I dati, i grafici e i BoxPlot si trovano in allegato

Quindi abbiamo deciso di non tenerne conto.

Secondo il Sistema Internazionale, l'unità di misura per l'angolo è il radiante e per la velocità angolare è il secondo⁻¹. Non abbiamo tenuto conto della direttiva della *Conferenza generale dei pesi e delle misure*, ma abbiamo adottato di volta in volta le unità di misura più consone secondo i seguenti criteri:

1. *ordine di precisione*, essendo la frequenza di alcune osservazioni 10 giorni, adottando come unità di misura il secondo, avremmo cambiato l'ordine di precisione;
2. *la consuetudine storica*, da sempre in astronomia si misurano gli angoli in gradi;
3. *facilità di visualizzazione e comprensione*, per permettere ad un pubblico più ampio di comprendere i risultati ottenuti e di compararli con quelli forniti dalle tabelle astronomiche.

6 Risultati ^[6]

6.1 Phobos: è il corpo celeste più vicino a Marte, in quanto nei momenti di sovrapposizione con Deimos, appare e Deimos scompare.

Dai dati notiamo che il periodo di rivoluzione intorno a Marte dura dalle 7 alle 8 ore; in realtà, le ultime misurazioni danno un valore di 7 ore 39,2 min.

Osservando le velocità angolari, notiamo che variano da un valore minimo di 0,53 gradi/min ($8,75 \cdot 10^{-3}$ gradi/s) ad un massimo di 0,97 gradi/min ($1,61 \cdot 10^{-2}$ gradi/s), e la velocità media è di 0,9391 gradi/min, ossia $2,261 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, mentre quella data dalle ultime misurazioni è di $2,279 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

Da questi dati e dal BoxPlot, abbiamo dedotto che è possibile descrivere l'orbita di Phobos come se si muovesse di moto circolare uniforme, secondo una legge $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ dove $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$ e ω è la velocità angolare media $2,261 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

6.2 Deimos: è il secondo corpo celeste da Marte.

Dai dati, notiamo che il periodo di rivoluzione intorno a Marte dura dalle 30 alle 31 ore; in realtà, le ultime misurazioni danno un valore di 30,28 ore.

Osservando le velocità angolari, notiamo che variano da un valore minimo di 0,1667 gradi/min ($2,78 \cdot 10^{-5}$ gradi/s) ad un massimo di 0,2317 gradi/min ($3,833 \cdot 10^{-3}$ gradi/s), e la velocità media è di 0,1909 gradi/min, ossia $5,759 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, mentre quella data dalle ultime misurazioni è di $5,55 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

Da questi dati e dal BoxPlot, abbiamo dedotto che è possibile descrivere l'orbita di Phobos come se si muovesse di moto circolare uniforme, secondo una legge $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ dove $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$ e ω è la velocità angolare media $5,759 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

6.3 Sole: compie una rivoluzione intorno a Marte in un periodo di circa 1,96 anni, mentre in realtà il periodo di rivoluzione di Marte è di 1,88 anni.

Notiamo che la velocità angolare diminuisce passando da una media di 0,58 gradi/giorni a una di 0,45 gradi/giorni. Quindi, il moto non è circolare uniforme rispetto a Marte.

La velocità angolare media da noi calcolata è di 0,51 gradi/giorni, mentre quella reale 0,52 gradi/giorni.

6.4 Terra: compie una rivoluzione intorno a Marte in un periodo di circa 736 giorni.

Notiamo che la velocità angolare diminuisce drasticamente fino ad assumere valori negativi dal 17/12/2009 al 2/03/2010. Assistiamo quindi ad un fenomeno di retrogradazione e il moto non è circolare uniforme.

6.5 Venere: compie una rivoluzione intorno a Marte in un periodo compreso tra 696 e 706 giorni.

^[6] per ultime misurazioni intendiamo quelle comunemente date nella tabelle astronomiche

Notiamo che la velocità angolare diminuisce drasticamente fino ad assumere valori negativi dal 20/07/2009 al 29/08/2009 e dal 21/05/2010 al 10/07/2010. Quindi assistiamo ad un fenomeno di retrogradazione e il moto non è circolare uniforme.

6.6 Mercurio: compie una rivoluzione intorno a Marte in un periodo compreso tra 706 e 716 giorni. Notiamo che la velocità angolare diminuisce drasticamente fino ad assumere valori negativi dal 02/03/2009 al 22/03/2009, dal 10/06/2009 al 30/06/2009, dal 18/09/2009 al 08/10/2009, dal 27/12/2009 al 11/01/2010, dal 01/04/2010 al 21/04/2010, dal 10/07/2010 al 30/07/2010, dal 18/10/2010 al 07/11/2010. Quindi assistiamo ad un fenomeno di retrogradazione e il moto non è circolare uniforme.

Notiamo che la retrogradazione si ripete regolarmente ogni 98 giorni; e ha una durata di 20 giorni circa.

7 Ipotesi

Mentre per Phobos e Deimos è stato possibile trovare un'equazione che descriva l'orbita con buona approssimazione, ciò con accade per il moto del Sole e degli altri pianeti.

La dottrina aristotelica riteneva che l'unico moto possibile per gli astri fosse quello circolare uniforme poiché gli astronomi antichi vedevano la Luna come perfettamente circolare e pensavano che il cerchio fosse la figura geometrica perfetta. Tutti gli astri, dovendo essere perfetti, si muovevano dunque lungo orbite circolari o costruibili con composizioni di cerchi.

Per giustificare l'apparente moto non uniforme del Sole, Tolomeo ipotizzò che si muovesse su un cerchio centrato in un punto differente dalla Terra chiamato *eccentrico* e che le velocità angolari dovessero essere calcolate ponendo il vertice nel suo simmetrico rispetto alla Terra, chiamato *equante*. Era un metodo complesso per descrivere un'orbita ellittica.

Il metodo kepleriano si è potuto diffondere anche grazie alle osservazioni delle imperfezioni della forma degli astri: i mari lunari e le macchie solari.

Il nostro astronomo Martolomeo avrebbe potuto ideare almeno tre teorie:

1. ripercorrere lo stesso cammino degli scienziati terrestri;
2. avrebbe potuto ipotizzare l'Universo come composizione di cerchi ed ellissi, vedendo che Phobos e Deimos hanno rispettivamente forma pseudoellittica e pseudocircolare.

Quindi, il Sistema Solare martocentrico avrebbe potuto essere descritto;

- 1) L'orbita del Sole sarebbe stata descritta dall'equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

e i pianeti avrebbero percorso epicicloidali di equazione:

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos \theta - r \cos\left(\frac{R+r}{r} \theta\right) \\ y = (R + r) \sin \theta - r \sin\left(\frac{R+r}{r} \theta\right) \end{cases}$$

dove R è il raggio dell'orbita solare, r è la distanza pianeta-Sole, $\theta = \omega t$, ω è la velocità angolare e t è il tempo. L'origine degli assi non è in Marte, ma traslata in un punto chiamato *eccentrico*, mentre le velocità angolari vengono calcolate ponendo il vertice nel suo simmetrico rispetto alla Terra, chiamato *equante*, come nel modello tolemaico degli epicicli, ma con il *deferente* dei satelliti coincidente con l'orbita solare.

- 2) Il Sole avrebbe percorso un'orbita di equazione parametrica:

$$r(1 + e\cos(\theta)) = 1 \quad (\text{moto ellittico})$$

e i pianeti avrebbero percorso delle traiettorie come se ruotassero su una circonferenza il cui centro ruotasse a sua volta sull'orbita solare ellittica. Non avendo trovato questa curva in nessun libro di geometria, abbiamo deciso di battezzare questa curva con il nome di *epiclissoide*.
Stiamo ancora cercando la sua equazione, che dovrebbe essere del tipo:

$$\begin{cases} (a + r) \cos\theta - r\cos\left(\frac{a+r}{r}\theta\right) \\ (a + r) \sin\theta - r\sin\left(\frac{a+r}{r}\theta\right) \end{cases}$$

dove e è l'eccentricità dell'orbita solare, a è la distanza di Sole-Marte, r è la distanza pianeta-Sole $\theta = \omega t$, ω è la velocità angolare e t è il tempo.

8 Prospettive future

Per verificare le nostre ipotesi, sarebbe auspicabile rifare le osservazioni aumentando la frequenza e il periodo di rilevamento dei dati.

Sarebbe interessante anche ampliare il progetto prendendo in considerazione i corpi celesti che abbiamo trascurato, in particolare i pianeti esterni o gassosi visibili ad occhio nudo da Marte.

Potrebbe essere utile costruire un software di simulazione che permetta di misurare l'altezza degli astri sull'orizzonte marziano in modo da costruire un modello astronomico tridimensionale.

E perché non spostare ulteriormente il punto di osservazione? Si potrebbero costruire molti altri sistemi cosmologici, ad esempio vesuviani, giovani e perché no, lunari! In fondo l'uomo è già andato sulla Luna!!!

Bibliografia

- JOHN L. E. DREYER, *Storia dell'astronomia da Talete a Keplero*, Milano, Feltrinelli, 1970
- PIERRE DUHEM, *Le système du monde: histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, voll. I e II, ed. Hermann, 1954
- THOMAS S. KUHN, *La rivoluzione copernicana*, Torino, Einaudi, 1959
- PAUL TANNERY, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, New York, Arno press, 1976
- EMANUELE DE ROSA, ANTONIO RIMALDUCCI, FILIPPO SANTI, *Appunti di astronomia: teoria e pratica*, cap. 3, in www.gak.it
- GIANFRANCO GIACOBINO, *Modelli del sistema solare con Cabri géomètre 2*, in «Cabrirrsae», Marzo 1999, n. 19, pp. 6-9
- JOHN W. TUKEY, *Exploratory Data Analysis*, Reading - Massachusetts, Addison-Wesley, 1977
- ARTHUR KOESTLER, *I Sonnambuli*, Milano, Jaca Book, 1982
- JONATHAN SWIFT, *I viaggi di Gulliver*, Milano, Bur, 2004
- VOLTAIRE, *Micromega*, Milano, Garzanti, 2001
- JOHN BANVILLE, *La notte di Keplero*, Guanda, Parma, 2002

Sitografia

- Sito ufficiale dell'Anno Internazionale dell'Astronomia: www.astronomy2009.org
- Sito ufficiale della NASA: www.nasa.gov
- Sito ufficiale dell'Osservatorio astronomico di Brera: www.brera.inaf.it
- Riproduzione digitale dei diari dell'astronomo G. Schiapparelli:
www.brera.inaf.it/docM/OAB/MARTE/index_marte.html
- Sito ufficiale del Planetario di Milano: www.comune.milano.it/planetario/index.html
- Sito ufficiale del Circolo Astrofili di Milano: www.astrofilimilano.org/
- Sito dedicato al Sistema Solare: www.nineplanets.org
- Pagina del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano dedicata alle leggi di Keplero: http://newrobin.mat.unimi.it/users/antonio/meccel/Meccel_1.pdf
- Pagina di un sito sulla nostra galassia dedicata alle leggi di Keplero:
www.galassiere.it/keplero_1.htm
- Sito dedicato all'opera dell'ing. Corrado Brogi, ricco di informazioni su curve ed equazioni:
<http://spazioinwind.libero.it/corradobrogi>
- Enciclopedia libera: <http://it.wikipedia.org>

Altre fonti particolarmente ricche sono state le conferenze del Civico Planetario di Milano "Ulrico Hoepli":

- 9 ottobre 2008- I primi risultati dell'ultima missione mandata su Marte a cercare tracce di vita- CESARE GUAITA
- 6 novembre 2008- Alle origini dell'Astronomia e della scienza del cielo-MOGI VICENTINI
- 19 novembre 2008- Marte: una chiacchierata sul pianeta rosso- NORBERTO MILANI

Phobos

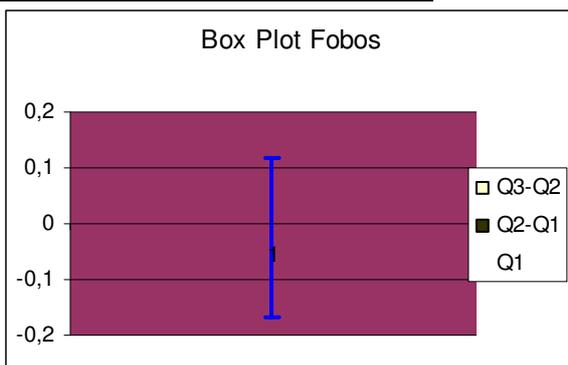
data	ora	posizioni angolari	velocità angolari (%/min)
01/01/2009	0.00	290,4	0,57
01/01/2009	1.00	324,8	0,85
01/01/2009	2.00	15,5	0,69
01/01/2009	3.00	61,7	0,76
01/01/2009	4.00	103,3	0,87
01/01/2009	5.00	149,1	0,80
01/01/2009	6.00	201,4	0,73
01/01/2009	7.00	249,4	1,01
01/01/2009	8.00	293,4	0,84
01/01/2009	9.00	354,2	0,53
01/01/2009	10.00	44,7	0,69
01/01/2009	11.00	76,4	0,82
01/01/2009	12.00	117,7	0,87
01/01/2009	13.00	167	0,97
01/01/2009	14.00	219,1	0,53
01/01/2009	15.00	277,3	0,85
01/01/2009	16.00	308,8	1,08
01/01/2009	17.00	0	0,70
01/01/2009	18.05	65	0,70
01/01/2009	19.00	90,9	0,87
01/01/2009	20.00	132,8	0,84
01/01/2009	21.00	185	0,73
01/01/2009	22.00	235,5	0,99
01/01/2009	23.00	279,4	0,64
02/01/2009	0.00	339	0,78
02/01/2009	1.00	17,3	0,69
02/01/2009	2.00	63,8	0,77
02/01/2009	3.00	105,3	0,88
02/01/2009	4.00	151,3	0,77
02/01/2009	5.00	203,9	0,77
02/01/2009	6.00	250,3	

Deimos

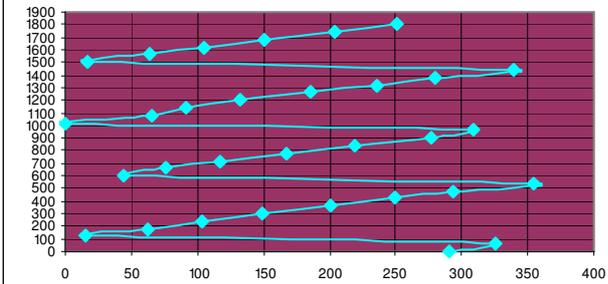
data	ora	posizioni angolari	velocità angolari (%/min)
01/01/2009	0.00	162	0,0017
01/01/2009	1.00	162,1	0,2267
01/01/2009	2.00	175,7	0,2300
01/01/2009	3.00	189,5	0,2200
01/01/2009	4.00	202,7	0,2050
01/01/2009	5.00	215	0,1967
01/01/2009	6.00	226,8	0,1950
01/01/2009	7.00	238,5	0,1817
01/01/2009	8.00	249,4	0,3817
01/01/2009	9.00	272,3	0,1783
01/01/2009	10.00	283	-0,0367
01/01/2009	11.00	280,8	0,1850
01/01/2009	12.00	291,9	0,1850
01/01/2009	13.00	303	0,1967
01/01/2009	14.00	314,8	0,4183
01/01/2009	15.00	339,9	0,0100
01/01/2009	16.00	340,5	0,2250
01/01/2009	17.00	354	0,4500
01/01/2009	18.05	21	-0,0133
01/01/2009	19.00	20,2	0,1817
01/01/2009	20.00	31,1	0,2317
01/01/2009	21.00	45	0,1950
01/01/2009	22.00	56,7	0,1667
01/01/2009	23.00	66,7	0,3967
02/01/2009	0.00	90,5	-0,0300
02/01/2009	1.00	88,7	0,1800
02/01/2009	2.00	99,5	0,1783
02/01/2009	3.00	110,2	0,1800
02/01/2009	4.00	121	0,2000
02/01/2009	5.00	133	0,2117
02/01/2009	6.00	145,7	

radianti totali	24,4205
secondi totali	108000
velocità vera	$2,279 \cdot 10^{-4}$
velocità calcolata	$2,261 \cdot 10^{-4}$
vel.media	1800min=0,77773

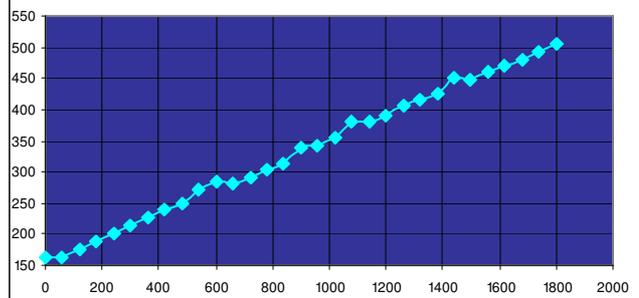
radianti totali	5,9957
secondi totali	10800
vel.vera	$5,759 \cdot 10^{-5}$
vel.calcolata	$5,55 \cdot 10^{-5}$
vel.media	1800min=0,19094



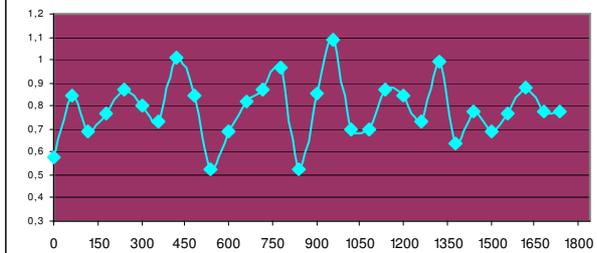
Posizione Phobos



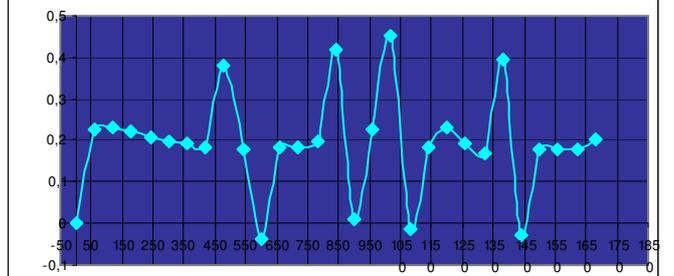
Posizione Deimos



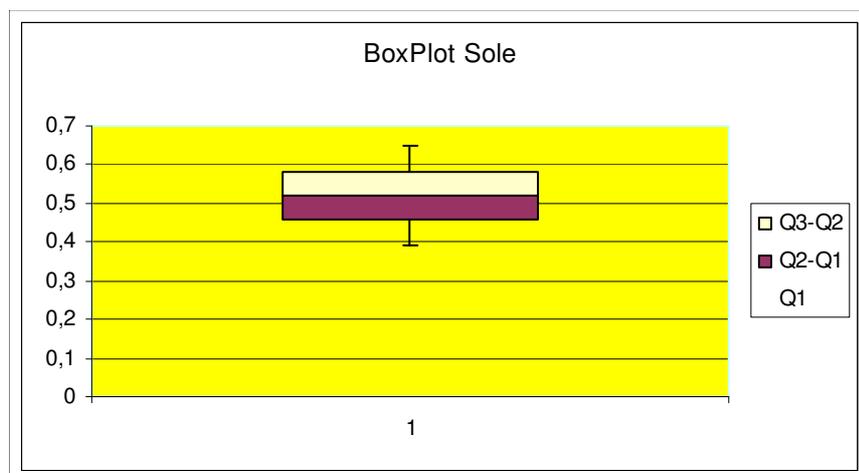
Velocità angolari Phobos

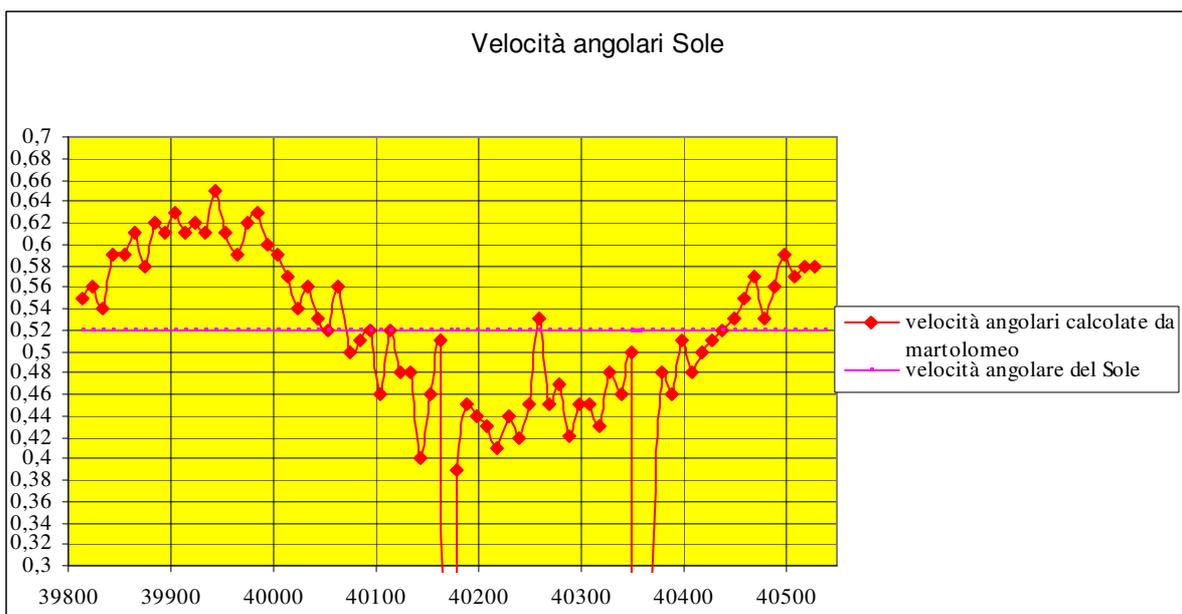
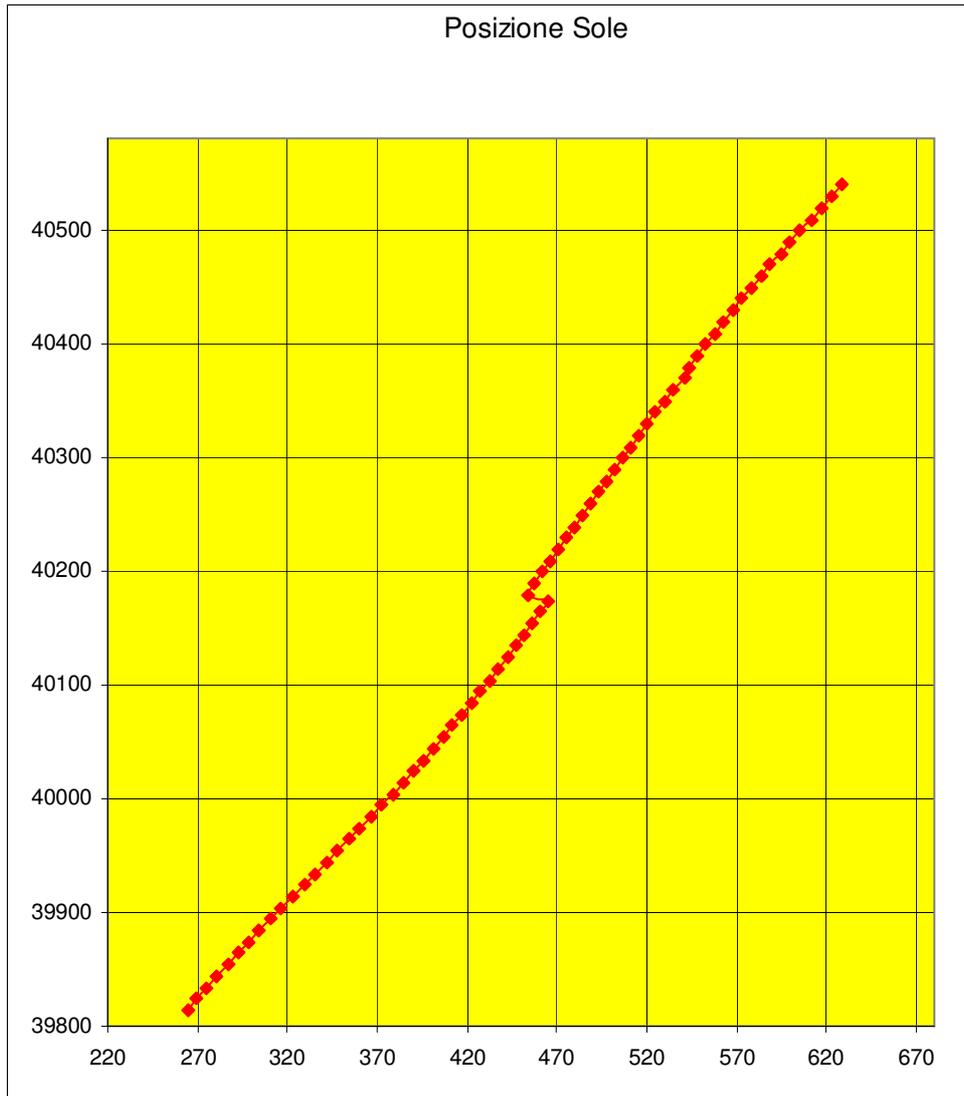


Velocità angolari Deimos



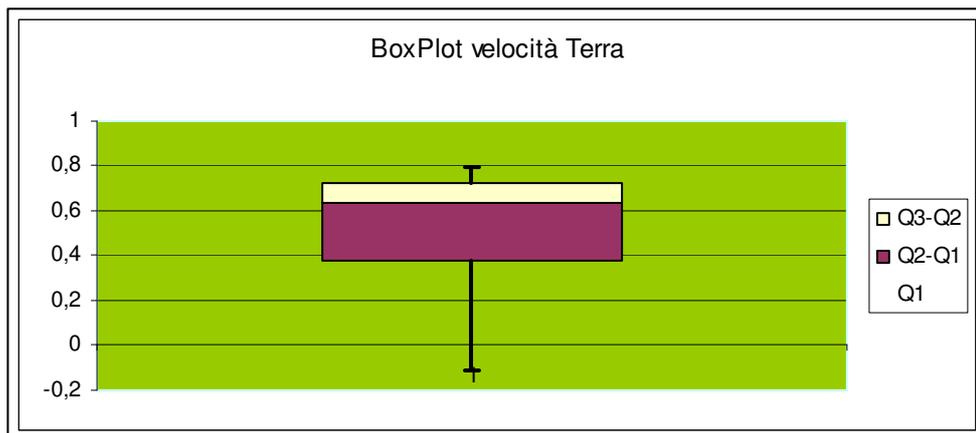
Sole								
data	Posizione angolare	Velocità angolare (°/giorno)	data	Posizione angolare	Velocità angolare (°/giorno)	data	Posizione angolare	Velocità angolare (°/giorno)
01/01/09	264,3	0,55	08/09/09	51,6	0,56	11/05/10	151,3	0,45
11/01/09	269,8	0,56	18/09/09	57,2	0,5	21/05/10	155,8	0,43
21/01/09	275,4	0,54	28/09/09	62,2	0,51	31/05/10	160,1	0,48
31/01/09	280,8	0,59	08/10/09	67,3	0,52	10/06/10	164,9	0,46
10/02/09	286,7	0,59	18/10/09	72,5	0,46	20/06/10	169,5	0,5
20/02/09	292,6	0,61	28/10/09	77,1	0,52	30/06/10	174,5	-35,36
02/03/09	298,7	0,58	07/11/09	82,3	0,48	10/07/10	-179,1	0,24
12/03/09	304,5	0,62	17/11/09	87,1	0,48	20/07/10	-176,7	0,48
22/03/09	310,7	0,61	27/11/09	91,9	0,4	30/07/10	-171,9	0,46
01/04/09	316,8	0,63	07/12/09	95,9	0,46	09/08/10	-167,3	0,51
11/04/09	323,1	0,61	17/12/09	100,5	0,51	19/08/10	-162,2	0,48
21/04/09	329,2	0,62	27/12/09	105,6	-2,36	29/08/10	-157,4	0,5
01/05/09	335,4	0,61	01/01/10	93,8	0,39	08/09/10	-152,4	0,51
11/05/09	341,5	0,65	11/01/10	97,7	0,45	18/09/10	-147,3	0,52
21/05/09	348	0,61	21/01/10	102,2	0,44	28/09/10	-142,1	0,53
31/05/09	354,1	0,59	31/01/10	106,6	0,43	08/10/10	-136,8	0,55
10/06/09	0	0,62	10/02/10	110,9	0,41	18/10/10	-131,3	0,57
20/06/09	6,2	0,63	20/02/10	115	0,44	28/10/10	-125,6	0,53
30/06/09	12,5	0,6	02/03/10	119,4	0,42	07/11/10	-120,3	0,56
10/07/09	18,5	0,59	12/03/10	123,6	0,45	17/11/10	-114,7	0,59
20/07/09	24,4	0,57	22/03/10	128,1	0,53	27/11/10	-108,8	0,57
30/07/09	30,1	0,54	01/04/10	133,4	0,45	07/12/10	-103,1	0,58
09/08/09	35,5	0,56	11/04/10	137,9	0,47	17/12/10	-97,3	0,58
19/08/09	41,1	0,53	21/04/10	142,6	0,42	27/12/10	-91,5	0,58
29/08/09	46,4	0,52	01/05/10	146,8	0,45			

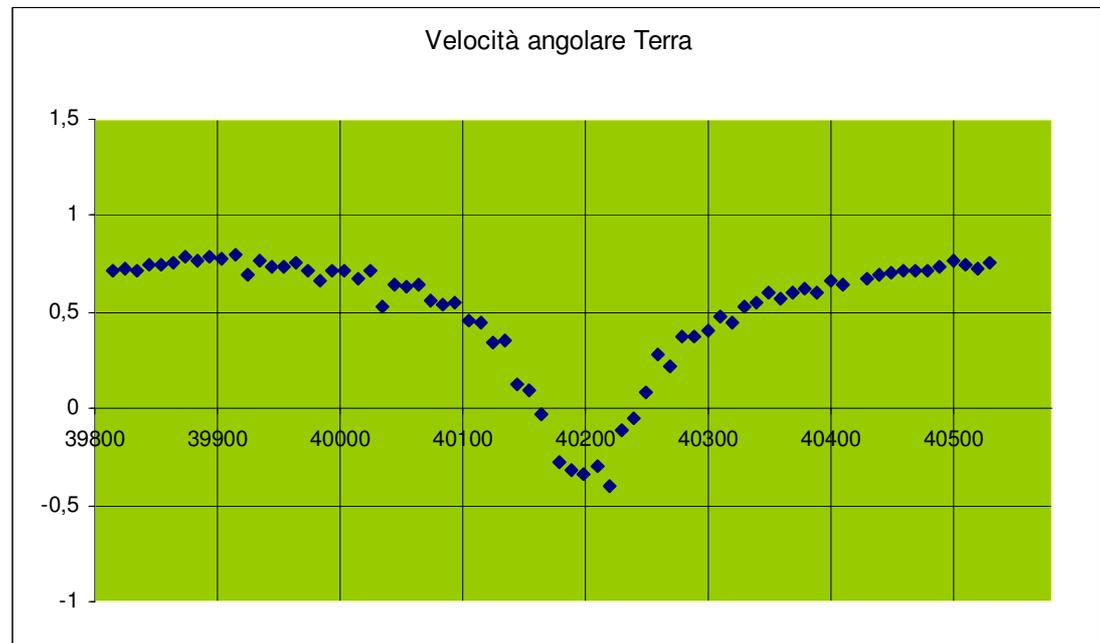
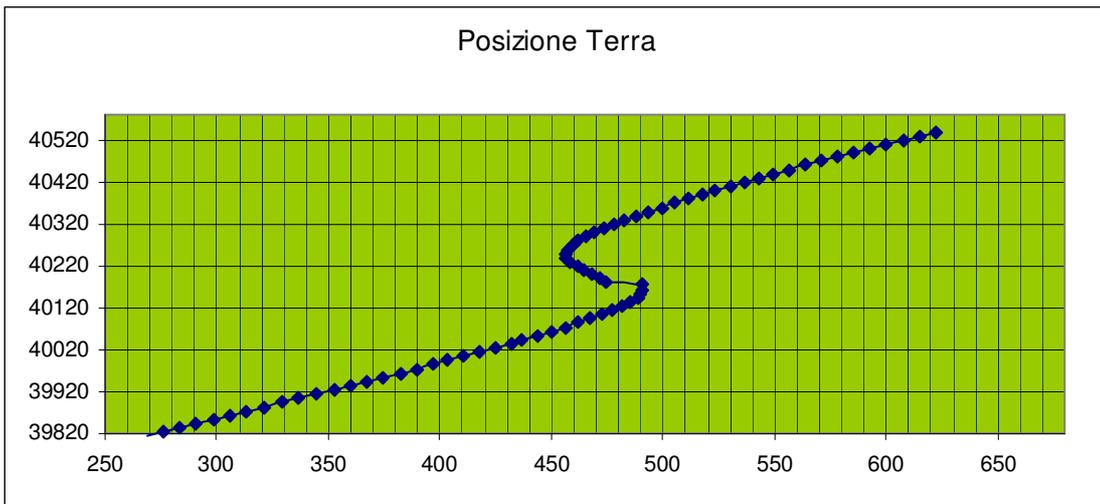




Terra

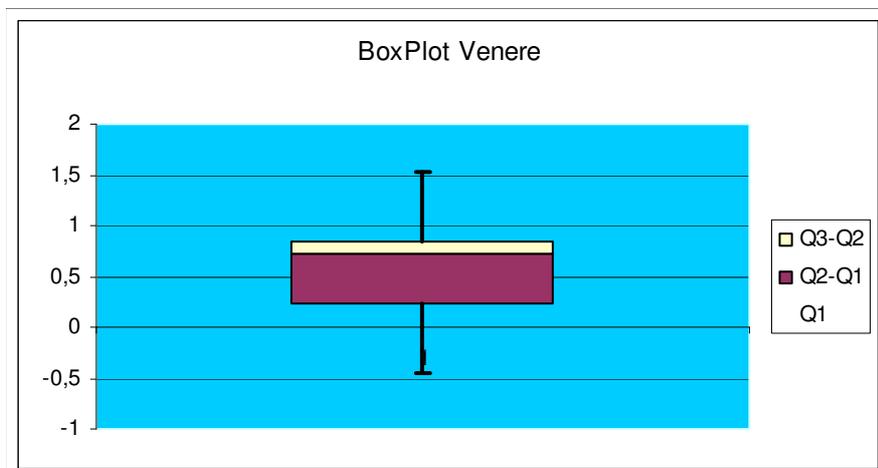
data	Posizione angolare	Velocità angolare (°/giorno)	data	Posizione angolare	Velocità angolare (°/giorno)	data	Posizione angolare	Velocità angolare (°/giorno)
01/01/09	269,2	0,72	08/09/09	449,7	0,64	11/05/10	473,5	0,48
11/01/09	276,4	0,73	18/09/09	456,1	0,56	21/05/10	478,3	0,45
21/01/09	283,7	0,71	28/09/09	461,7	0,54	31/05/10	482,8	0,53
31/01/09	290,8	0,75	08/10/09	467,1	0,55	10/06/10	488,1	0,55
10/02/09	298,3	0,75	18/10/09	472,6	0,46	20/06/10	493,6	0,6
20/02/09	305,8	0,76	28/10/09	477,2	0,45	30/06/10	499,6	0,57
02/03/09	313,4	0,79	07/11/09	481,7	0,34	10/07/10	505,3	0,6
12/03/09	321,3	0,77	17/11/09	485,1	0,35	20/07/10	511,3	0,62
22/03/09	329	0,79	27/11/09	488,6	0,13	30/07/10	517,5	0,6
01/04/09	336,9	0,78	07/12/09	489,9	0,1	09/08/10	523,5	0,66
11/04/09	344,7	0,8	17/12/09	490,9	-0,03	19/08/10	530,1	0,64
21/04/09	352,7	0,69	27/12/09	490,6	-1,63	29/08/10	536,5	-35,36
01/05/09	359,6	0,77	01/01/10	474,3	-0,28	08/09/10	542,9	0,67
11/05/09	367,3	0,74	11/01/10	471,5	-0,32	18/09/10	549,6	0,69
21/05/09	374,7	0,74	21/01/10	468,3	-0,34	28/09/10	556,5	0,7
31/05/09	382,1	0,76	31/01/10	464,9	-0,3	08/10/10	563,5	0,71
10/06/09	389,7	0,72	10/02/10	461,9	-0,4	18/10/10	570,6	0,72
20/06/09	396,9	0,66	20/02/10	457,9	-0,11	28/10/10	577,8	0,71
30/06/09	403,5	0,72	02/03/10	456,8	-0,05	07/11/10	584,9	0,74
10/07/09	410,7	0,71	12/03/10	456,3	0,08	17/11/10	592,3	0,77
20/07/09	417,8	0,67	22/03/10	457,1	0,28	27/11/10	600	0,75
30/07/09	424,5	0,72	01/04/10	459,9	0,22	07/12/10	607,5	0,73
09/08/09	431,7	0,53	11/04/10	462,1	0,37	17/12/10	614,8	0,76
19/08/09	437	0,64	21/04/10	465,8	0,37	27/12/10	622,4	9,76
29/08/09	443,4	0,63	01/05/10	469,5	0,4			

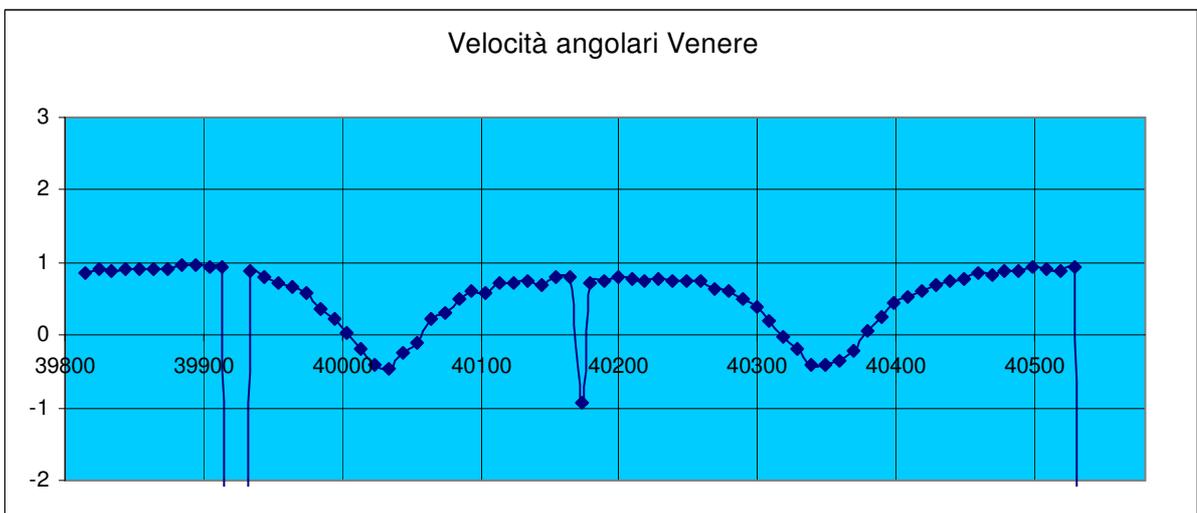
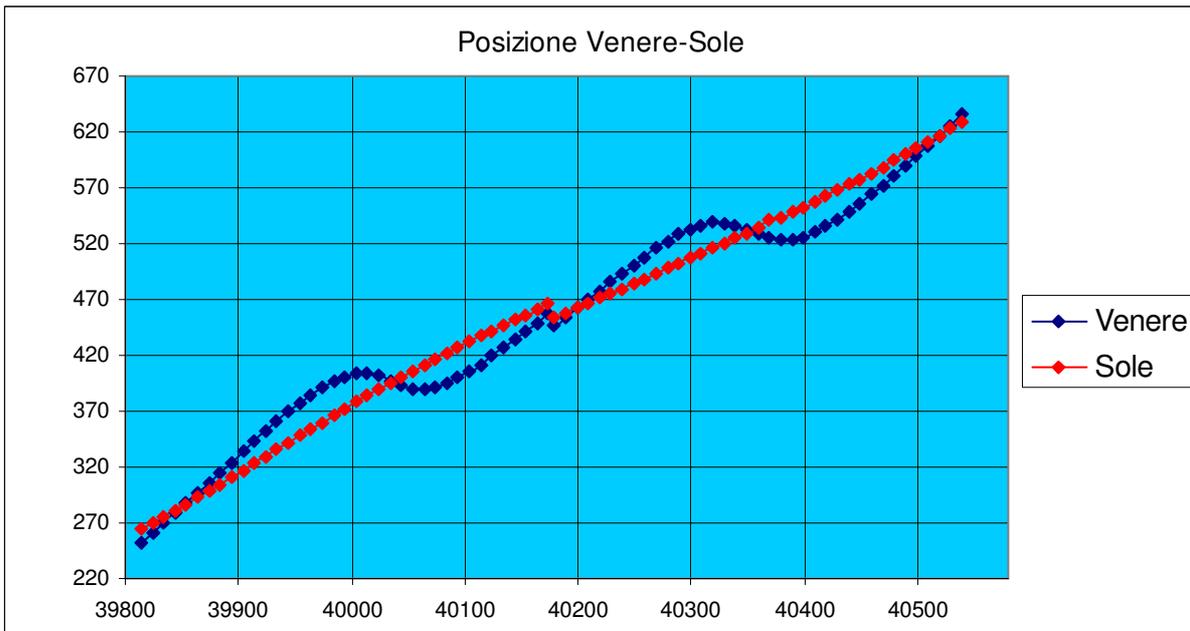
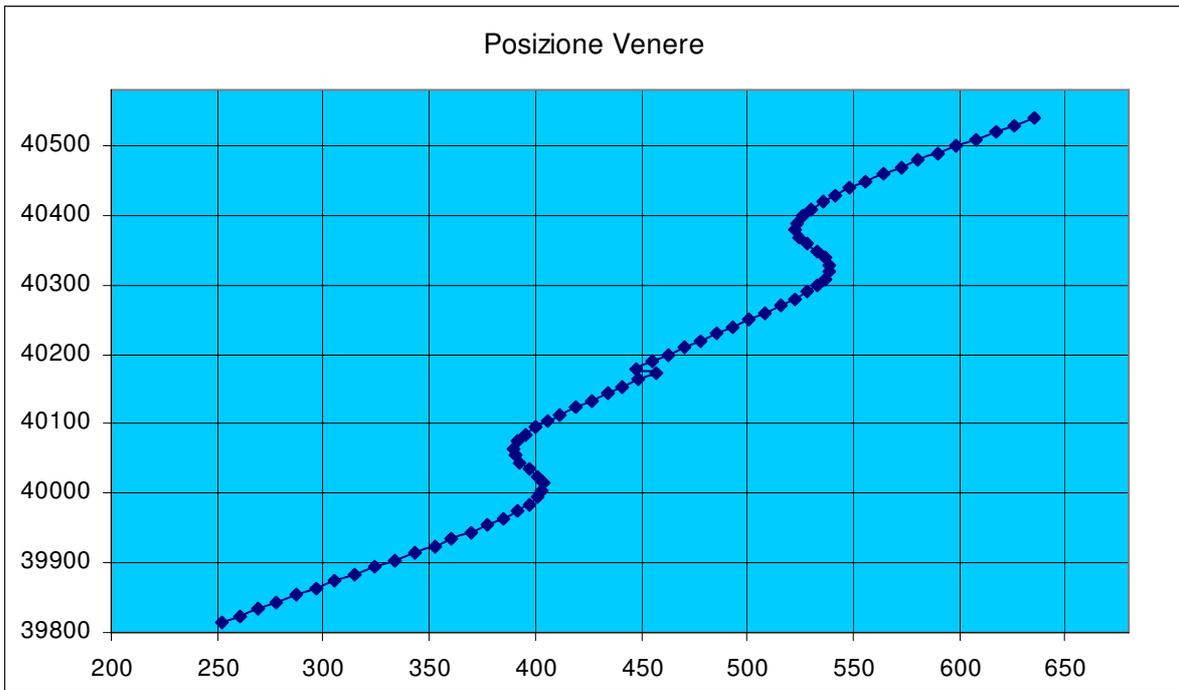




Venere

data	Posizione angolare	Velocità angolare (°/giorno)	data	Posizione angolare	Velocità angolare (°/giorno)	data	Posizione angolare	Velocità angolare (°/giorno)
01/01/09	251,9	0,85	08/09/09	29,5	0,23	11/05/10	176,8	0,2
11/01/09	260,4	0,9	18/09/09	31,8	0,32	21/05/10	178,8	-0,01
21/01/09	269,4	0,88	28/09/09	35	0,5	31/05/10	178,7	-0,19
31/01/09	278,2	0,91	08/10/09	40	0,61	10/06/10	176,8	-0,41
10/02/09	287,3	0,91	18/10/09	46,1	0,58	20/06/10	172,7	-0,42
20/02/09	296,4	0,91	28/10/09	51,9	0,73	30/06/10	168,5	-0,36
02/03/09	305,5	0,92	07/11/09	59,2	0,73	10/07/10	164,9	-0,21
12/03/09	314,7	0,97	17/11/09	66,5	0,74	20/07/10	162,8	0,07
22/03/09	324,4	0,96	27/11/09	73,9	0,7	30/07/10	163,5	0,24
01/04/09	334	0,93	07/12/09	80,9	0,8	09/08/10	165,9	0,44
11/04/09	343,3	0,94	17/12/09	88,9	0,79	19/08/10	170,3	0,52
21/04/09	352,7	-35,21	27/12/09	96,8	-0,93	29/08/10	175,5	0,6
01/05/09	0,6	0,89	01/01/10	87,5	0,73	08/09/10	181,5	0,69
11/05/09	9,5	0,8	11/01/10	94,8	0,75	18/09/10	188,4	0,76
21/05/09	17,5	0,72	21/01/10	102,3	0,79	28/09/10	196	0,78
31/05/09	24,7	0,67	31/01/10	110,2	0,78	08/10/10	203,8	0,86
10/06/09	31,4	0,59	10/02/10	118	0,76	18/10/10	212,4	0,84
20/06/09	37,3	0,37	20/02/10	125,6	0,77	28/10/10	220,8	0,89
30/06/09	41	0,22	02/03/10	133,3	0,75	07/11/10	229,7	0,89
10/07/09	43,2	0,03	12/03/10	140,8	0,74	17/11/10	238,6	0,93
20/07/09	43,5	-0,2	22/03/10	148,2	0,74	27/11/10	247,9	0,91
30/07/09	41,5	-0,4	01/04/10	155,6	0,65	07/12/10	257	0,89
09/08/09	37,5	-0,45	11/04/10	162,1	0,6	17/12/10	265,9	0,95
19/08/09	33	-0,25	21/04/10	168,1	0,49	27/12/10	275,4	-27,54
29/08/09	30,5	-3,05	01/05/10	173	-17,3			





Mercurio

data	Posizione angolare	Velocità angolare (°/giorno)	data	Posizione angolare	Velocità angolare (°/giorno)	data	Posizione angolare	Velocità angolare (°/giorno)
01/01/09	252	1,29	08/09/09	65	0,63	11/05/10	135	0,66
11/01/09	264,9	1,49	18/09/09	71,3	-0,23	21/05/10	141,6	0,84
21/01/09	279,8	1,33	28/09/09	69	-0,82	31/05/10	150	1,24
31/01/09	293,1	1,04	08/10/09	60,8	-0,13	10/06/10	162,4	1,28
10/02/09	303,5	0,7	18/10/09	59,5	0,51	20/06/10	175,2	-34,94
20/02/09	310,5	0,25	28/10/09	64,6	0,9	30/06/10	185,8	0,31
02/03/09	313	-0,26	07/11/09	73,6	0,93	10/07/10	188,9	-0,44
12/03/09	310,4	-0,49	17/11/09	82,9	1,02	20/07/10	184,5	35,53
22/03/09	305,5	-0,1	27/11/09	93,1	0,92	30/07/10	179,8	-0,17
01/04/09	304,5	0,75	07/12/09	102,3	0,92	09/08/10	178,1	0,06
11/04/09	312	1,36	17/12/09	111,5	0,47	19/08/10	178,7	-35,01
21/04/09	325,6	1,41	27/12/09	116,2	-1,61	29/08/10	188,6	1,11
01/05/09	339,7	1,3	01/01/10	100,1	-0,78	08/09/10	199,7	1,37
11/05/09	352,7	1,1	11/01/10	92,3	-0,32	18/09/10	213,4	1,42
21/05/09	3,7	0,86	21/01/10	89,1	0,3	28/09/10	227,6	0,99
31/05/09	12,3	0,54	31/01/10	92,1	0,66	08/10/10	237,5	0,47
10/06/09	17,7	-0,06	10/02/10	98,7	0,78	18/10/10	242,2	-0,03
20/06/09	17,1	-0,74	20/02/10	106,5	0,99	28/10/10	241,9	-0,41
30/06/09	9,7	-0,33	02/03/10	116,4	1,04	07/11/10	237,8	-0,35
10/07/09	6,4	0,7	12/03/10	126,8	1,04	17/11/10	234,3	0,22
20/07/09	13,4	1,11	22/03/10	137,2	0,63	27/11/10	236,5	0,77
30/07/09	24,5	1,1	01/04/10	143,5	-0,37	07/12/10	244,2	1,31
09/08/09	35,5	1,07	11/04/10	139,8	-0,63	17/12/10	257,3	1,54
19/08/09	46,2	1,03	21/04/10	133,5	-0,17	27/12/10	272,7	8,73
29/08/09	56,5	0,85	01/05/10	131,8	0,32			

