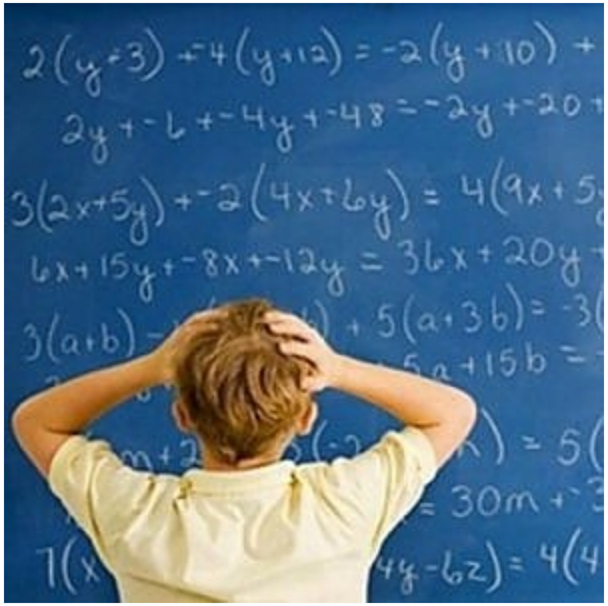
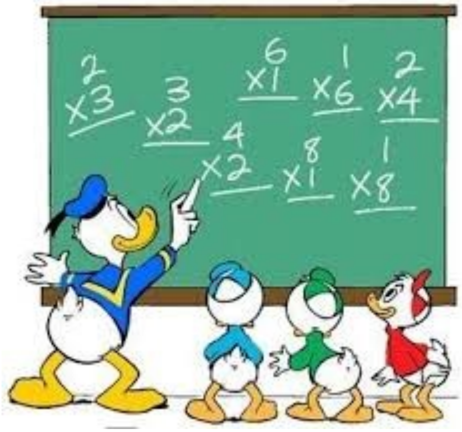
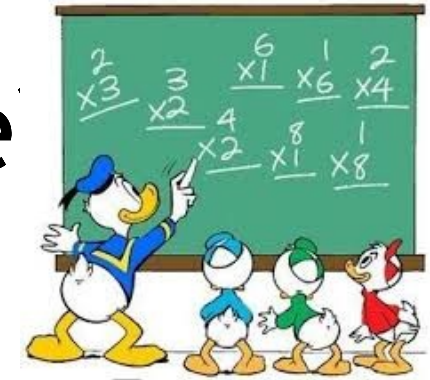
ASPETTI DIDATTICI

Rosa Iaderosa





Perché dimostrare



A scuola i ragazzi imparano a:

- *verificare affermazioni /proprietà*
- *giustificarle razionalmente*
- *dimostrarle per dare loro una validazione logica all'interno di una teoria*

INSEGNARE LA DIMOSTRAZIONE

Gli studenti devono imparare a:

Comprendere la dimostrazione attraverso dei modelli che l’insegnante fornisce

Costruire dimostrazioni

COSTRUIRE COMPETENZE DIMOSTRATIVE

Nell'organizzazione del discorso dimostrativo è essenziale distinguere:

- l'aspetto **semantico** (legato ai significati)
- l'aspetto **sintattico** (legato alle regole di strutturazione in cui dalla premessa, attraverso le regole di inferenza, si deduce la conseguenza)

E' necessario indagare e costruire competenze sia per quanto riguarda la ***sintassi*** che la ***semantica***.

Può essere opportuno didatticamente, a volte, **separare** le due tipologie di attività.

Costruire il discorso dimostrativo

- *Esplorare una situazione*
- *Formulare delle congetture*
- *Definire gli enunciati*
- *Identificare le premesse e le deduzioni costruendo sequenze deduttive con una loro ben chiara concatenazione logica*
- *Capire il senso di questa attività*

Dall’argomentare al dimostrare in matematica

Nonostante l’argomentazione sia un’attività svincolata dalla matematica, (ha infatti un interesse anche in ambito linguistico e testuale) , nell’insegnamento della matematica la dimostrazione si innesta attraverso una evoluzione formale e teorica dell’argomentazione.

Costruire competenze argomentative

Gli allievi in matematica possono argomentare:

- *esplicitando il loro pensiero con i compagni e con l'insegnante*
- *verbalizzando procedure operative*
- *verbalizzando strategie risolutive*
- *giustificando razionalmente proprietà*
- *interagendo nella discussione di classe*
- ....

ALCUNE PROPOSTE PER PREPARARE GRADUALMENTE AL PENSIERO E ALLE ATTIVITA' DIMOSTRATIVE

Nella scuola secondaria di primo grado i ragazzi dovrebbero essere abituati sistematicamente a:

- *descrivere procedure verbalmente*
- *verbalizzare le strategie risolutive di un problema*
- *osservare e descrivere configurazioni attraverso l'uso di modelli dinamici in geometria*
- *giustificare razionalmente proprietà geometriche e aritmetiche*
- *risolvere problemi geometrici in cui sia necessario il "trattamento" della figura*
- *trasformare correttamente enunciati in varie forme linguistiche con un uso consapevole dei connettivi*
- ……………………………………………………………………………

Alcune attività

- *motivare risposte*
- *giustificare affermazioni*
- *discutere collettivamnente "ragionamenti" forniti da alcuni allievi, non necessariamente corretti*
- *educare a distinguere tra:*
  - *verifiche su esempio*
  - *argomentazioni su casi generali*
  - *congetture e controesempi*
- *dare spazio a problemi vari, non prevalentemente di tipo calcolativo e sulla misura*
- *introdurre precocemente il linguaggio algebrico*
- ……………………………………………………………………

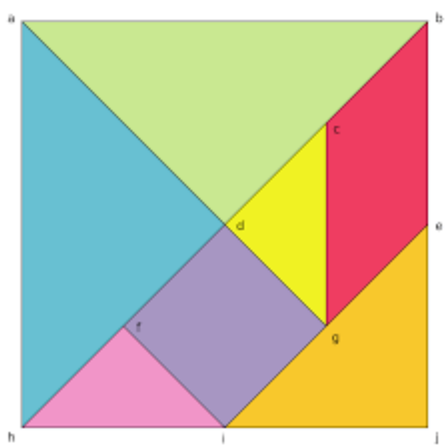
Nel biennio della scuola secondaria superiore

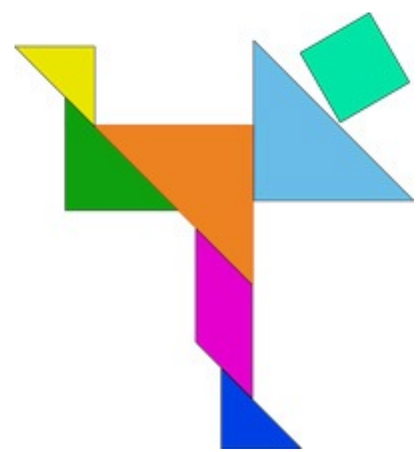
- *riflettere sul significato di vero/falso*
- *attività di tipo sintattico :“giocare “con le frasi e i loro pezzi”…*
- *(esempio)*
- *verbalizzare le strategie risolutive di un problema*
- *formulare e riformulare enunciati*
- *formulare congetture attraverso l’esplorazione della figura con un software di geometria dinamica*
- *individuare i vincoli di una figura e quindi ipotesi e tesi di un teorema (esempio)*
- *Riflessione consapevole sul significato delle seguenti attività: verifica – giustificazione – generalizzazione - dimostrazione*
- ……………………………………………………………….

Un esempio

Il gioco del Tangram è ricchissimo di geometria, e di matematica più colta di quanto si possa superficialmente immaginare pensando alla equiscomponibilità.

A livelli scolari diversi si possono fare delle scoperte e ragionare sulla formulazione degli enunciatipossibili, validandoli o non.





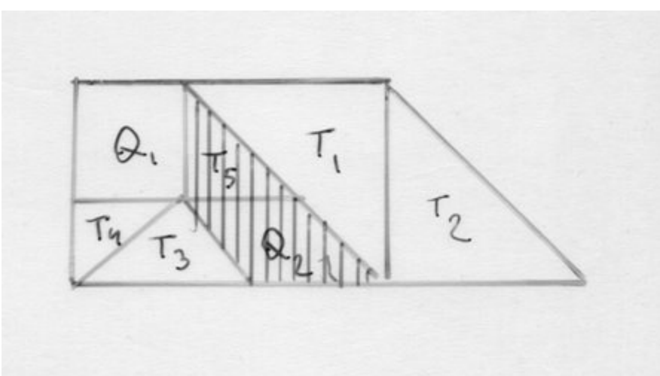
giocare con le frasi nel gioco del Tangram

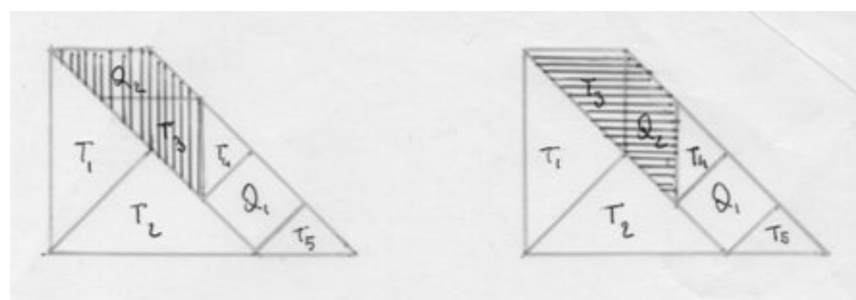
SE una figura è un trapezio rettangolo ALLORA la figura si può construire con 7 pezzi tan

SE una figura si può costruire con 7 pezzi tan ALLORA la figura è un trapezio rettangolo

SE una figura NON è un trapezio rettangolo ALLORA la figura NON si può costruire con 7 pezzi tan

SE una figura NON si può costruire con 7 pezzi tan ALLORA la figura NON è un trapezio rettangolo





Attività di tipo prevalentemente sintattico (più semplici in ambito aritmetico/algebrico)

Le frasi che seguono erano tutte su cartellini e Marco le aveva disposte ordinatamente in modo che costituissero un ragionamento corretto per giustificare la proprietà B a partire dalla proposizione A. Un colpo di vento ha rimescolato tutti i cartellini. Disponili tu in un nuovo ordine collegandoli con frasi numerate.

PROPOSIZIONE A $\boxed{a, b, c \text{ sono tre numeri naturali consecutivi}}$

CARTELLINI IN DISORDINE :

$a + a + 1 + a + 2 = a + a + a + 1 + 2$
(proprietà commutativa della somma)

$a + a + a + 1 + 2 = (a + a + a) + (1 + 2)$
(proprietà associativa della somma)

$b = a + 1$ e $c = a + 1 + 1 = a + 2$

$3a + 3 = 3 \cdot a + 3 \cdot 1 = 3 \cdot (a + 1)$
(proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma)

$a + b + c = a + (a + 1) + (a + 2)$

$a + (a + 1) + (a + 2) = a + a + 1 + a + 2$
(proprietà associativa della somma)

$(a + a + a) + (1 + 2) = 3a + 3$

$a + b + c = 3 \cdot (a + 1)$

↓ 1

....

↓ 2

....

↓ 3

....

PROPOSIZIONE B $\boxed{a + b + c \text{ è un multiplo di } 3}$

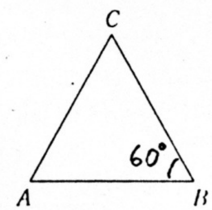
Un esempio di attività di tipo sintattico (in ambito geometrico)

Tavola 3

Attività di riordino di una sequenza deduttiva

Riordina nella sequenza corretta, numerandole, le varie proposizioni che concorrono a giustificare la seguente affermazione:

Un triangolo A B C tale che:
AB = AC e mis <ABC= 60
è equilatero



PROPOSIZIONI

a) proposizione n. ...
mis<ABC+ mis<BCA = 120°

motivo:
perché somma di angoli uguali e ciascuno di ampiezza 60°

b) proposizione n. ...
Il triangolo ABC è isoscele

motivo:
perché AB = AC (ipotesi)

c) proposizione n. ...
AC = BC

motivo:
per la proposizione in f) e per la proposizione "se in un triangolo due angoli sono uguali allora i lati ad essi opposti sono uguali

d) proposizione n. ...
mis<CBA = mis<BCA = 60°

motivo:
perché mis <BCA = 60° (ipotesi) e per la proposizione "in un triangolo isosce-le gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali"

e) proposizione n. ...
il triangolo ABC è equilatero

motivo:
per ché AB = AC (per ipotesi) e AC = BC per la proposizione in c).

f) proposizione n. ...
mis<BAC= 180° - 120°= 60° = mis <ABC

motivo:
per la proposizione "la somma degli angoli interni di un triangolo misura180°" e la proposizione in a) .

E infine…i problemi

IVANO, IL CARAMELLAIO (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)
Ivano sistema le caramelle che produce in scatole a forma di parallelepipedo rettangolo, di dimensioni esterne:
8 cm; 3 cm e 5 cm.
Sistema poi queste scatole in scatoloni, anche questi a forma di parallelepipedo rettangolo, di dimensioni interne
60 cm, 60 cm e 5 cm, prima di spedirle.
Quante scatole di caramelle, al massimo, si potranno inserire in ogni scatolone?
Spiegate come avete fatto a trovare la soluzione.
(dalla prova 1 – XXIII Rally Matematico transalpino)

ANALISI A PRIORI

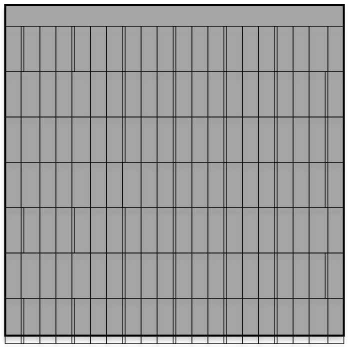
•Compito matematico

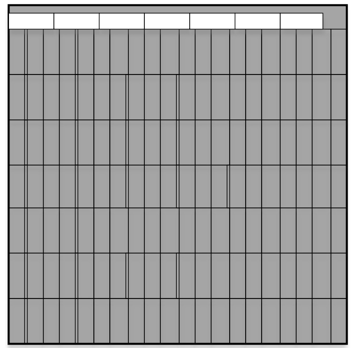
- Calcolare quante scatole a forma di parallelepipedo rettangolo di dimensioni esterne 8 x 3 x 5 cm, possono essere sistemate in uno scatolone a forma di parallelepipedo rettangolo di dimensioni interne, 60 x 60 x 5 cm .

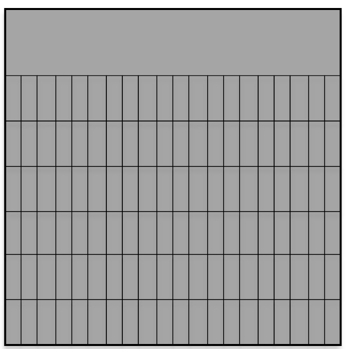
•Analisi del compito

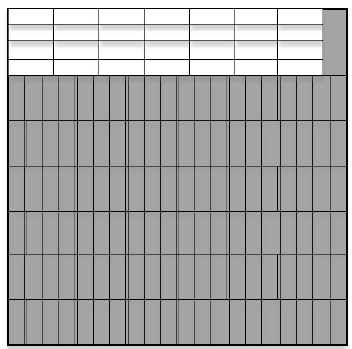
- Immaginare il compito di riempimento dello scatolone con le scatole piccole in modo da metterne il più possibile o di lasciare il minor spazio vuoto possibile. Un eventuale calcolo del rapporto dei due volumi permette di sapere che il «massimo teorico» è 150 = 18000/120 (o 3600/24 dopo semplificazione per 5) piccole scatole nella grande, per poter valutare le risposte successive trovate.
- Rendersi conto che le scatole piccole possono essere disposte con 8 cm, 5 cm o 3 cm in altezza sul fondo dello scatolone 60 × 60; che la prima disposizione non è possibile perché uscirebbe dallo scatolone, che la disposizione con 3 cm in altezza lascerebbe dei vuoti di 2 cm che non si potrebbero colmare e che bisognerà adottare la disposizione di 5 cm in altezza per una utilizzazione ottimale dello spazio. Il problema si riduce allora nel trovare una disposizione ottimale delle facce rettangolari di 3 × 8 sul «fondo» quadrato dello scatolone 60 × 60.
- Disporre 20 rettangoli di larghezza 3 gli uni di fianco agli altri, per ottenere un rettangolo di 60 × 8, poi riprodurli sette volte e occupare un rettangolo di 56 × 60. (*figura 1*)*. Si sistemano così 140 scatole e resta uno spazio libero di 4 × 60, nel quale si possono ancora sistemare 7 scatole (dopo rotazione di un quarto di giro) (*figura 2*)*. Lo spazio libero è allora costituito da una striscia di 1 × 56 e da un quadrato di 4 × 4, cioè 72 cm^2 del fondo.
- Il resto di 72 cm^2 inutilizzabile, corrispondente alla superficie di 3 rettangoli di 8 × 3, o a 3 scatole, deve incitare alla ricerca di una migliore disposizione e a chiedersi se non si possa eliminare la striscia di 1 × 56.
- Una soluzione consiste nel sistemare solo 6 file di 20 rettangoli (*figura 3*)* per occupare un rettangolo di 48 × 60 (al posto di 56 × 60) con un rettangolo di 12 × 60 (12 è un multiplo di 3) ancora a disposizione, nel quale si possono mettere 7 blocchi di 4 rettangoli (dopo rotazione di un quarto di giro) gli uni di fianco agli altri (*figura 4*)*. Si sono così sistemati 6 × 20 + 7 × 4 = 148 rettangoli. Non ci sono più strisce vuote e resta a disposizione un rettangolo di 4 × 12 nel quale si può ancora mettere una 149ª scatola, con una parte vuota di 24 cm^2 del fondo, ma costituita da una striscia di 1 × 12 e da un rettangolo di 3 × 4 nel quale non si può sistemare una 150ª scatola. (*figura 5*)*
- Rimane solo da convincersi che non esistono disposizioni migliori, ma non si dispone di una dimostrazione.

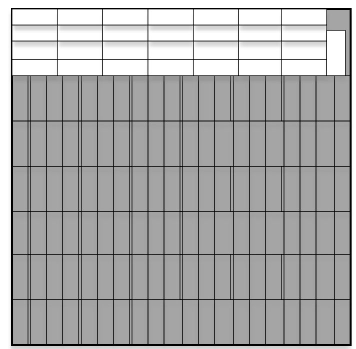
Le figure sono nella pagina seguente











Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta, 149, con dettagli della disposizione delle scatole (disegno, descrizione della disposizione, …)

3 Risposta corretta, 149, senza spiegazione o con spiegazione non chiara
o risposta 148 con dettagli della disposizione

2 Risposta 148 senza spiegazione o con spiegazione non chiara
o risposta 147 con dettagli della disposizione

1 Risposta 150 con procedura aritmetica (rapporto dei volumi 1200/8)
oppure risposta tra 140 e 146 con dettagli della disposizione

0 Incomprensione del problema

•**Livello:** 6, 7, 8, 9, 10

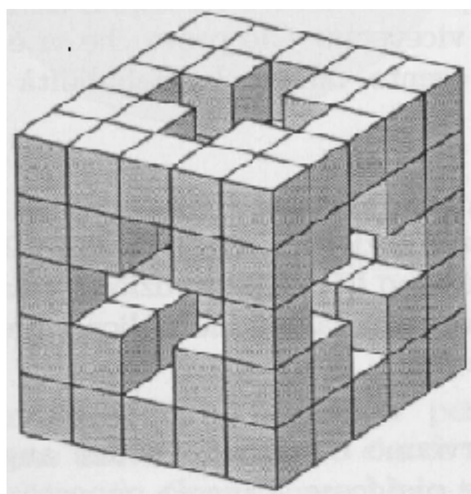
Un problema inusuale

La maggior parte dei ragazzi non ha pensato alla difficoltà di disporre i cioccolatini all’interno della scatola compatibilmente con le dimensioni di questa,ed ha semplicemente diviso tra loro i volumi. Come si vede, una strategia risolutiva richiedeva ben altro ragionamento!

IL CUBO DI KUBI

Kubi ha regalato all’amico Rubik un cubo, come quello rappresentato in figura, con una bella foratura centrale a forma di croce.

Rubik ha molto apprezzato il regalo e si è divertito a calcolare il numero dei cubetti mancanti dal cubo.
Qual è questo numero?



Le strategie presenti negli elaborati osservati sono infatti molto varie ed originali.
Possiamo così riassumerle:

- alcuni allievi cercano con successo di immaginare l'interno del cubo "guardandolo dall'alto" e di ricostruirne il contenuto (Protocollo 3.1)
- altri immaginano di "tagliarlo a fette" in orizzontale , a volte con successo (Protocollo 3.2), altre scontrandosi con difficoltà (Protocollo 3.3)
- altri cercano di ricostruire il numero dei cubetti interni attraverso l'osservazione dello sviluppo piano delle singole facce (Protocollo 3.4).

In diversi casi c'è una strategia significativa e potenzialmente efficace, ma le difficoltà cognitive sono più forti, in altri casi gli allievi superano le oggettive difficoltà proprio grazie alle rappresentazioni esterne e mentali utilizzate.

protocollo3.1

Ragionamento

Abbiamo ragionato facendo una rappresentazione grafica del cubo visto dall'alto.

	1	3	1	
1	1	5	1	1
3	5	5	5	3
1	1	5	1	1
	1	3	1	

I numeri corrispondono alla quantità di quadretti mancanti in quella fila. Abbiamo poi contato i quadretti mancanti che corrispondono a 49

Abbiamo scoperto il volume complessivo del cubo ($5^3 = 125$); contando i cubetti presenti (76), li abbiamo sottratti dal volume totale, trovando il numero dei cubetti mancanti: 49.

$V = 5^3 = 125$

n° cubetti mancanti = V − n° cubetti = 125 − 76 = 49.

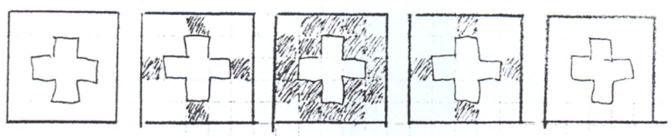
apendo che ci sono 8 cubetti per vertice e 1 in più
er spigolo trovo il numero di cubetti.

ebetti = cubetti vertice x vertici + ~~[illegible]~~ 1 · n° spigoli = 8 · 8 + 1 · 12 = 64 + 12 = 76

protocollo 3.2

I cubetti mancanti sono 49

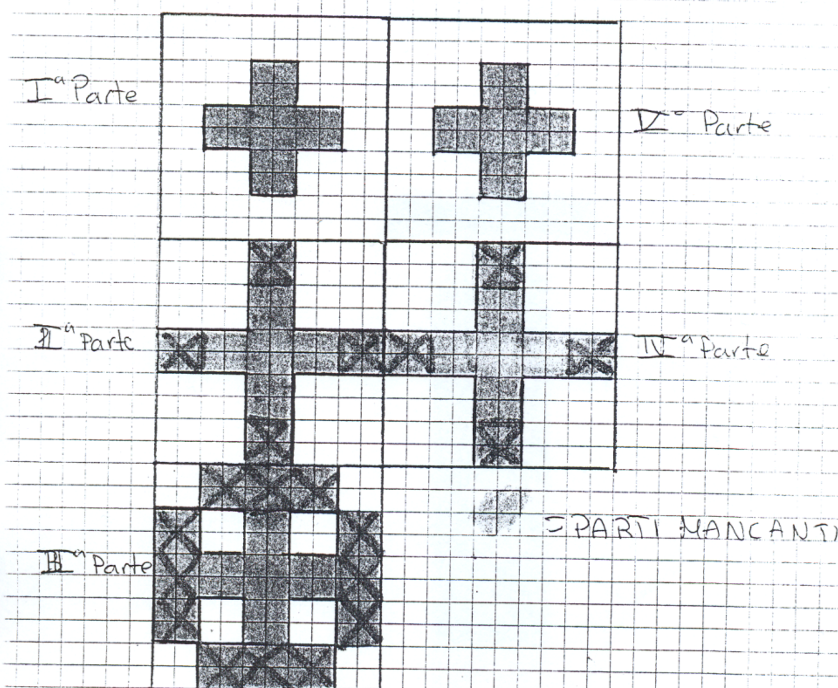
Abbiamo ragionato così:
se tagliamo ~~=~~ orizzontalmente in cinque parallelepipedi uguali



Tracciamo prima una fila di croci che non incrocia con niente. Poi segnamo dove le altre croci orizzontali ~~[illegible]~~ non incrociano con la prima. Abbiamo contato gli spazi segnati e li abbiamo sommati ~~[illegible]~~ ottenendo:

$5+9+21+9+5=49$

IL CUBO DI CUBI

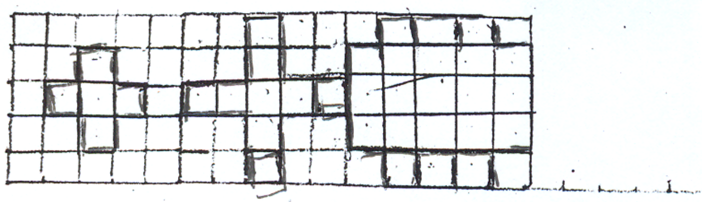


Ho tagliato a fette il cubo, colorando le parti mancanti: SONO 25
Le parti segnate in verde sono le parti che formano la croce superiore

Protocollo 3.3

protocollo 3.4

5 5

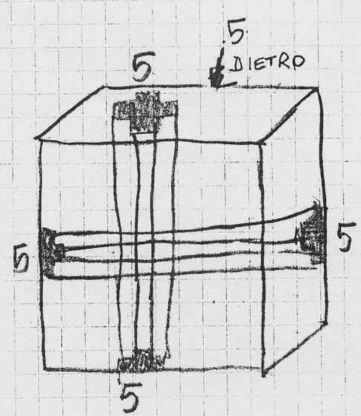


$5+5 + 9+9+21 = 49$

$10 + 18 + 21$

ABBIAMO SCOMPOSTO
IL CUBO E ABBIAMO
CONTATO LE PARTI MANCANTI
DI OGNI DIMENSIONE
CIOE DI OGNI STRATO
E LA SOMMA DI
TUTTI I CUBETTI MANCANTI
CI E' RISULTATA 49

I quadratini mancanti ~~de~~ ogni lato sono 30
+ le ~~lo~~ profondità che è di 25 ~~[illegible]~~



$5 \times 6 = 30$

$30 + 25 + 20 = 75$

COD: 804
CLASSE: 3B

Il numero dei ~~g~~cubetti mancanti è 75, siamo arrivati a questa soluzione contando quanti cubetti mancano in una sola croce e ~~[illegible]~~ abbiamo immaginato di vedere come un foro profondo 5 cubetti. Allora abbiamo moltiplicato 5x5 ed ~~[illegible]~~ abbiamo trovato il numero di cubetti mancanti guardando una facciata del cubo del davanti, sapendo che è profondo 5.

Facendo questo ragionamento abbiamo moltiplicato ~~[illegible]~~ per tre perché le croci attraversano 2 facciate del cubo che in totale sono 6

protocollo 3.5

protocollo 3.6

Bisogna moltiplicare il numero di quadratini
che dovrebbero occupare una croce,
cioè 5 per il numero di quadratini che forma
no un lato. Quindi si fa 5 · 5 = 25 in modo da
ottenere una fila di croci all'interno del cubo
che va da una facciata all'opposta. A questo
punto si moltiplica per il numero di file all'
interno del cubo che sono 3, una dall'alto
al basso, una dalla facciata 2 alla sua opposta e
una dalla facciata 1 alla sua opposta. Quindi si fa
25 × 3 = 75 quadratini.

e i vostri ragazzi?

Alla fine del percorso analizzeremo con voi

i loro protocolli, le loro discussioni, la loro crescita…