il problema dei quattro quadrati

Traccia un quadrilatero ABCD. Sui suoi lati AB, BC, CD e AD costruisci quattro quadrati esternamente al quadrilatero. Determinati i centri E,F,G,H dei quattro quadrati, uniscili per ottenere il quadrilatero EFGH.

Esplora la configurazione ottenuta e questo quadrilatero.

Congetture:

1 . Se ABCD è un rettangolo allora EFGH è un quadrato e i vertici di ABCD appartengono ai lati di EFGH,…

2. Se ABCD è un quadrato allora EFGH è un quadrato e i punti EFGH sono i punti medi dei lati di ABCD,…

3. Se ABCD è un quadrilatero qualunque, allora EFGH ha le diagonali uguali e perpendicolari.

IL PROBLEMA DEI QUATTRO QUADRATI

Dimostrazione

Per dimostrare la congettura:

1.<u>Se ABCD è un rettangolo allora EFGH è un quadrato e i vertici di ABCD appartengono ai lati di EFGH</u>,

si osservi (Fig.1) che i triangoli ABE, BCF, CDG e ADH sono isosceli, con la base doppia rispetto all'altezza e con i lati obliqui coincidenti con metà diagonale del quadrato a cui appartengono; si tratta quindi di triangoli rettangoli, con gli angoli alla base di 45°.

Ogni lato di EFGH è costituito dalla somma delle due metà diagonali dei quadrati costruiti sulle basi del rettangolo, perciò, essendo i quadrati (e le diagonali) a due a due congruenti, i lati di EFGH sono tutti uguali. Avendo constatato che gli angoli in E, F, G, H sono di 90°, EFGH è un quadrato.

Ora, considerando l'angolo EBF, questo misura 180°, infatti è dato dalla somma di EBA= 45°, FBA= 45° e ABC= 90°e poiché lo stesso ragionamento vale per gli angoli in C, D e A, si può concludere che i vertici di ABCD appartengono ai lati di EFGH.

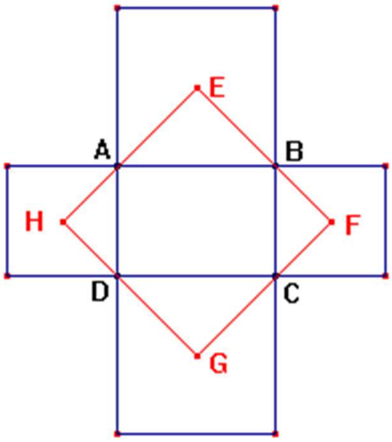

FIG.1

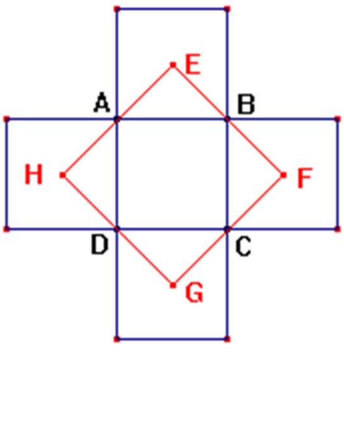

FIG.2

Nel caso in cui ABCD fosse un quadrato (Fig.2) la dimostrazione sarebbe analoga, ma ovviamente si avrebbe A, B, C, D punti medi dei lati di EFGH, poiché le diagonali dei quattro quadrati avrebbero uguale lunghezza.
Risulta così dimostrata anche la congettura:

2. <u>Se ABCD è un quadrato allora EFGH è un quadrato e i punti EFGH sono i punti medi dei lati di ABCD</u>

Il caso generale che corrisponde alla congettura:

3. <u>Se ABCD è un quadrilatero qualunque, allora EFGH ha le diagonali uguali e perpendicolari</u>

si può dimostrare utilizzando le trasformazioni geometriche, in particolare le isometrie. Il prodotto delle quattro rotazioni di ampiezza uguale a 90° e centri E, F, G, H trasforma evidentemente in se stesso il vertice A del quadrilatero. Ne consegue che questo prodotto di quattro rotazioni è l'identità. Ma il prodotto delle rotazioni di centri E e F è la simmetria di centro O1 (Fig.3), vertice di un triangolo rettangolo isoscele O1EF (poiché O1EF= O1FE=45°).
Analogamente, il prodotto delle rotazioni di centri G e H è la simmetria centrale di centro O2, vertice del triangolo rettangolo isoscele O2GH. Dal fatto che il prodotto delle simmetrie di centri O1 e O2 è l'identità deriva evidentemente che questi due punti coincidono. Ma ciò significa che il triangolo O1EG si ottiene dal triangolo O1FH per mezzo di una rotazione di ampiezza uguale a 90° e centro O1= O2, e pertanto i segmenti EG e FH sono uguali e perpendicolari.