Dall'argomentare al dimostrare in matematica

Nonostante l'argomentazione sia un'attività svincolata dalla matematica, (ha infatti un interesse anche in ambito linguistico e testuale) , nell'insegnamento della matematica la dimostrazione si innesta attraverso una evoluzione formale e teorica dell'argomentazione.

Nelle attività di risoluzione di problemi

gli studenti argomentano

per ***esplorare*** consapevolmente una situazione problema o una configurazione geometrica e descriverne caratteristiche, proprietà varianti e invarianti, ***ipotizzare*** la validità di una strategia, ***esplicitare*** verbalmente, motivare e spiegare varie fasi di una procedura e dei risultati ottenuti , ***spiegare*** quando e perché **il controllo** ci ha consentito di rivedere la strategia ci consente di rivedere la strategia risolutiva, ***riflettere*** sulle procedure scelte e ritornare su queste scelte ***motivandole*** , ***interpretare e reinterpretare*** in un contesto i risultati ottenuti attraverso l'utilizzo di un **modello**.

L'argomentazione si esplica anche su diversi *livelli di competenza*

di fatto le varie prestazioni osservate suggeriscono che **la competenza argomentativa si evolve soprattutto attraverso la capacità di coordinare varie rappresentazioni (verbale, iconica, numerica o simbolica) nel rappresentare i problemi e la loro risoluzione.**

Costruire competenze argomentative

Gli allievi in matematica possono argomentare:

- *esplicitando il loro pensiero con i compagni e con l’insegnante*
- *verbalizzando procedure operative*
- *verbalizzando strategie risolutive*
- *giustificando razionalmente proprietà*
- *interagendo nella discussione di classe*
- ……………………………………………………………

ALCUNE PROPOSTE PER PREPARARE GRADUALMENTE AL PENSIERO E ALLE ATTIVITA' DIMOSTRATIVE

Nella scuola secondaria di primo grado i ragazzi dovrebbero essere abituati sistematicamente a:

- *descrivere procedure verbalmente*
- *verbalizzare le strategie risolutive di un problema*
- *osservare e descrivere configurazioni attraverso l'uso di modelli dinamici in geometria*
- *giustificare razionalmente proprietà geometriche e aritmetiche*
- *risolvere problemi geometrici in cui sia necessario il "trattamento" della figura*
- *trasformare correttamente enunciati in varie forme linguistiche con un uso consapevole dei connettivi*
- ....

Alcune attività

- *motivare risposte*
- *giustificare affermazioni*
- *discutere collettivamnente "ragionamenti" forniti da alcuni allievi, non necessariamente corretti*
- *educare a distinguere tra:*
  - *verifiche su esempio*
  - *argomentazioni su casi generali*
  - *congetture e controesempi*
- *dare spazio a problemi vari, non prevalentemente di tipo calcolativo e sulla misura*
- *introdurre precocemente il linguaggio algebrico*
- ……………………………………………………………………………

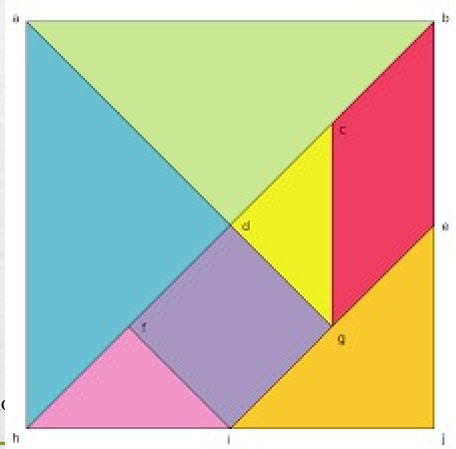
Nel biennio della scuola secondaria superiore

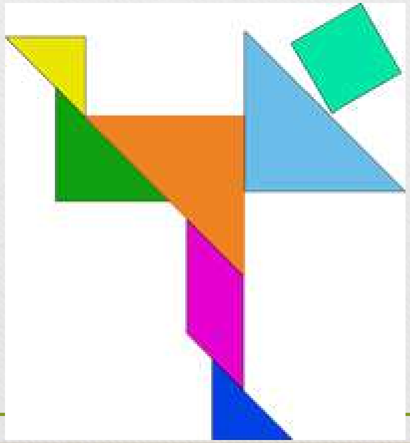
- *riflettere sul significato di vero/falso*
- *attività di tipo sintattico :"giocare "con le frasi e i loro pezzi"…*
- *(esempio)*
- *verbalizzare le strategie risolutive di un problema*
- *formulare e riformulare enunciati*
- *formulare congetture attraverso l'esplorazione della figura con un software di geometria dinamica*
- *individuare i vincoli di una figura e quindi ipotesi e tesi di un teorema (esempio)*
- *Riflessione consapevole sul significato delle seguenti attività: verifica – giustificazione – generalizzazione - dimostrazione*
-

Un esempio

Il gioco del Tangram è ricchissimo di geometria, e di matematica più colta di quanto si possa superficialmente immaginare pensando alla equiscomponibilità.

A livelli scolari diversi si possono fare delle scoperte e ragionare sulla formulazione degli enunciati possibili, validandoli o non.





“giocare” con le frasi nel gioco del Tangram

sono ***vere*** o ***false*** ?

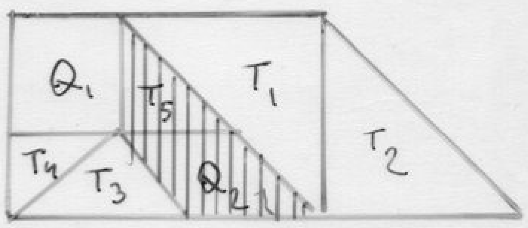
SE una figura è un trapezio rettangolo ALLORA la figura si può construire con 7 pezzi tan

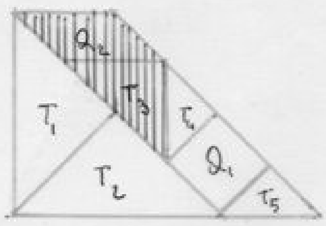
SE una figura si può costruire con 7 pezzi tan ALLORA la figura è un trapezio rettangolo

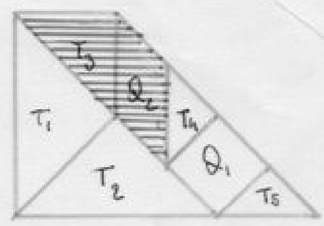
SE una figura NON è un trapezio rettangolo ALLORA

la figura NON si può costruire con 7 pezzi tan

SE una figura NON si può costruire con 7 pezzi tan ALLORA la figura NON è un trapezio rettangolo







Attività di tipo prevalentemente sintattico (più semplici in ambito aritmetico/algebrico)

Le frasi che seguono erano tutte su cartellini e Marco le aveva disposte ordinatamente in modo che costituissero un ragionamento corretto per giustificare la proprietà B a partire dalla proposizione A. Un colpo di vento ha rimescolato tutti i cartellini. Disponili tu in un nuovo ordine collegandoli con frasi numerate.

PROPOSIZIONE A $\boxed{a, b, c \text{ sono tre numeri naturali consecutivi}}$

CARTELLINI IN DISORDINE :

$a + a + 1 + a + 2 = a + a + a + 1 + 2$
(proprietà commutativa della somma)

$a + a + a + 1 + 2 = (a + a + a) + (1 + 2)$
(proprietà associativa della somma)

$b = a + 1$ e $c = a + 1 + 1 = a + 2$

$3a + 3 = 3 \cdot a + 3 \cdot 1 = 3 \cdot (a + 1)$
(proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma)

$a + b + c = a + (a + 1) + (a + 2)$

$a + (a + 1) + (a + 2) = a + a + 1 + a + 2$
(proprietà associativa della somma)

↓ 1

....

↓ 2

....

↓ 3

....

$a + b + c = 3 \cdot (a + 1)$

$(a + a + a) + (1 + 2) = 3a + 3$

PROPOSIZIONE B $\boxed{a + b + c \text{ è un multiplo di } 3}$

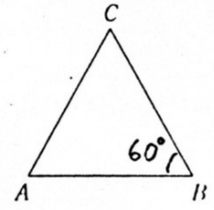
Un esempio di attività di tipo sintattico (in ambito geometrico)

Tavola 3

Attività di riordino di una sequenza deduttiva

Riordina nella sequenza corretta, numerandole, le varie proposizioni che concorrono a giustificare la seguente affermazione:

Un triangolo A B C tale che:
AB = AC e mis <ABC= 60
è equilatero



PROPOSIZIONI

a) proposizione n. ...
mis<ABC+ mis<BCA = 120°
motivo:
perché somma di angoli uguali e ciascuno di ampiezza 60°

b) proposizione n. ...
Il triangolo ABC è isoscele
motivo:
perché AB = AC (ipotesi)

c) proposizione n. ...
AC = BC
motivo:
per la proposizione in f) e per la proposizione "se in un triangolo due angoli sono uguali allora i lati ad essi opposti sono uguali

d) proposizione n. ...
mis<CBA = mis<BCA = 60°
motivo:
perché mis <BCA = 60° (ipotesi) e per la proposizione "in un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali"

e) proposizione n. ...
il triangolo ABC è equilatero
motivo:
per ché AB = AC (per ipotesi) e AC = BC per la proposizione in c).

f) proposizione n. ...
mis<BAC= 180° - 120°= 60° = mis <ABC
motivo:
per la proposizione "la somma degli angoli interni di un triangolo misura180°" e la proposizione in a) .

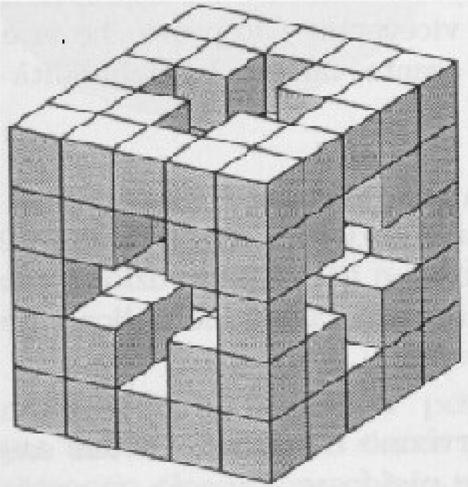
LA RISOLUZIONE DI PROBLEMI

L'argomentazione per esprimere   il *grado di appropriazione del problema* da parte del soggetto e i suoi processi di pensiero è un ambito estremamente interessante.

Gli allievi possono essere educati a "*raccontare*" le loro discussioni con i compagni   per arrivare alla soluzione oppure, più frequentemente a "*verbalizzare*" la procedura adottata per la risoluzione, *dopo* aver risolto il problema.

UN PROBLEMA INTERESSANTE

IL CUBO DI KUBI (CAT. 6, 7, 8)
Kubi ha regalato all'amico Rubik un cubo, come quello rappresentato in figura, con una bella foratura centrale a forma di croce.



Rubik ha molto apprezzato il regalo e si è divertito a calcolare il numero dei cubetti mancanti dal cubo. Qual è questo numero?

protocollo3.1

RAGIONAMENTO

Abbiamo ragionato facendo una rappresentazione grafica del cubo visto dall'alto.

	1	3	1	
1	1	5	1	1
3	5	5	5	3
1	1	5	1	1
	1	3	1	

I numeri corrispondono alla quantità di quadretti mancanti in quella fila. Abbiamo poi contato i quadretti mancanti che corrispondono a 49

Abbiamo scoperto il volume complessivo del cubo ($5^3 = 125$); contando i cubetti presenti (76), li abbiamo sottratti dal volume totale, trovando il numero dei cubetti mancanti: 49.

$V = 5^3 = 125$

n° cubetti mancanti = V − n° cubetti = 125 − 76 = 49.

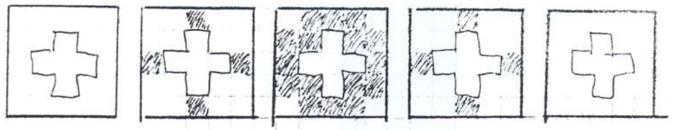
sapendo che ci sono 8 cubetti per vertice e 1 in più per spigolo trovo il numero di cubetti.

cubetti = cubetti vertice x vertici + ~~cub~~ 1 · n° spigoli = 8 · 8 + 1 · 12 = 64 + 12 = 76

protocollo 3.2

I cubetti mancanti sono 49

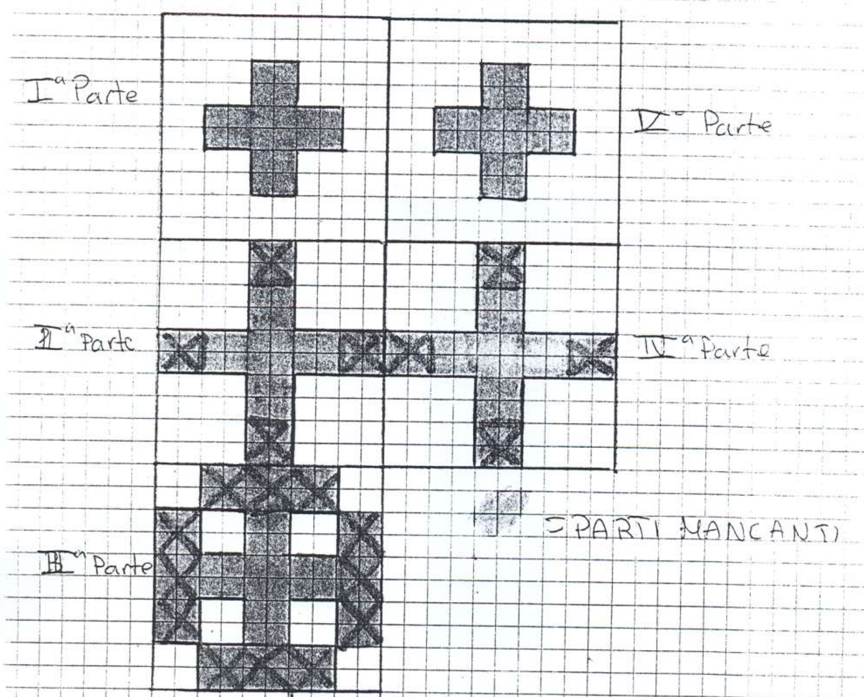
Abbiamo ragionato così:
se tagliamo orizzontalmente in cinque parallelepipedi uguali



Tracciamo prima una fila di croci che non incrocia con niente. Poi segnamo dove le altre croci orizzontali non incrociano con la prima. Abbiamo contato gli spazi segnati e li abbiamo sommati ottenendo:

$5+9+21+9+5 = 49$

IL CUBO DI KUBI

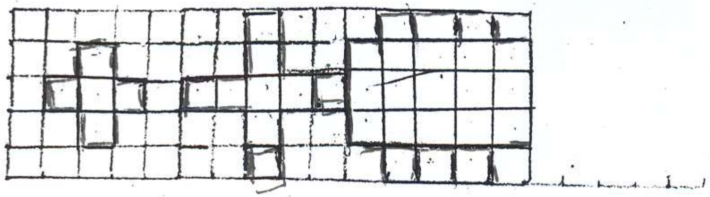


Ho tagliato a fette il cubo, colorando le parti mancanti: sono 25
Le parti segnate in verde sono le parti che formano la croce superiore

Protocollo 3.3

protocollo 3.4

5 5

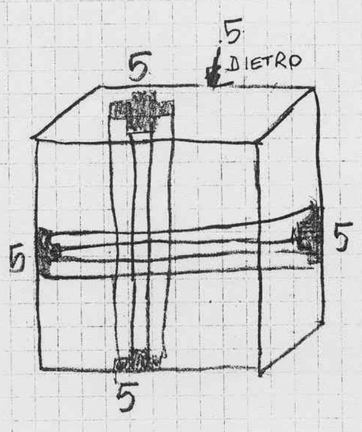


5+5 + 9+9+21 = 49

10 + 18 + 21

ABBIAMO SCOMPOSTO
IL CUBO E ABBIAMO
CONTATO LE PARTI MANCANTI
DI OGNI DIMENSIONE
CIOE DI OGNI STRATÓ
E LA SOMMA DI
TUTTI I CUBETTI MANCANTI
CI E' RISULTATA 49

I quadratini mancanti ~~da~~ ogni lato sono 30 + le ~~le~~ profondità che è di 25 ~~[illegible]~~



$5 \times 6 = 30$

$30 + 25 + 20 = 75$

COD: 804
CLASSE: 3B

Il numero dei ~~q~~cubetti mancanti è 75; siamo arrivati a questa soluzione contando quanti cubetti mancano in una sola croce e ~~[illegible]~~ abbiamo immaginato di vedere come un foro profondo 5 cubetti. Allora abbiamo moltiplicato 5x5 ed ~~[illegible]~~ abbiamo trovato il numero di cubetti mancanti guardando una facciata del cubo dal davanti, sapendo che è profondo 5.

Facendo questo ragionamento abbiamo moltiplicato ~~[illegible]~~ per tre perché le croci attraversano 2 facciate del cubo che in totale sono 6

protocollo 3.5

Bisogna moltiplicare il numero di quadratini
che dovrebbero occupare una croce,
cioè 5 per il numero di quadratini che forma
no un lato. Quindi si fa 5·5=25 in modo da
ottenere una fila di croci all'interno del cubo
che va da una facciata all'opposta. A questo
punto si moltiplica per il numero di file all'
interno del cubo che sono 3, una dall'alto
al basso, una dalla facciata 2 alla sua opposta e
una dalla facciata 1 alla sua opposta. Quindi si fa
25×3 = 75 quadratini.

protocollo 3.6

La rappresentazione della strategia risolutiva

Come si è visto nell'esempio, nell'attività di ricerca della strategia si mettono in atto rappresentazioni, prima interne (mentali), poi esterne, se ciò si discute nel gruppo, e si ricorre, soprattutto nel caso di reale invenzione della strategia, ad una molteplicità di rappresentazioni, anche iconiche.

Un problema interessante per osservare competenze argomentative

14. SALTI DI CANGURO (Cat. 7, 8, 9, 10)

Mamma canguro esce dalla tana con il suo piccolo nel marsupio e attraversa la radura per raggiungere il ruscello. Procede con andatura regolare compiendo salti di 8 m ciascuno. Al ritorno fa di nuovo esattamente lo stesso percorso procedendo ancora con salti di 8 m. A metà strada, però, si ferma, fa uscire il piccolo dal marsupio e continua il percorso, fino alla tana, saltando insieme a lui con salti regolari di 4 m ciascuno.

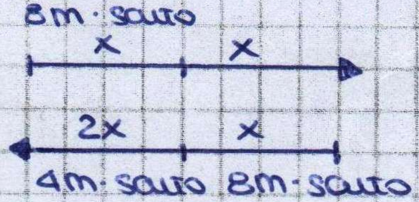
Alla fine, mamma canguro, tra andata e ritorno, ha fatto in tutto 135 salti, tra salti di 8 m e salti di 4 m.

Quanti metri ha percorso il piccolo canguro saltando sulle proprie zampe?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Risposta corretta (216 m)

Per prima cosa abbiamo diviso il percorso di andata a metà e, visto che mamma canguro all'andata ha un'andatura rego= lare di 8 m per salto, le due metà sono uguali. Abbiamo poi chiamato sia la prima sia la seconda metà x.
Il percorso del ritorno lo abbiamo diviso a sua volta a metà; la prima metà dove mamma canguro manteneva l'andatura regolare di salti lunghi 8 m l'abbiamo nominata x (visto che congruente alle altre due metà del percorso di andata), mentre la metà restante, visto che mamma canguro e il suo piccolo percorrono 4 m a salto, l'abbiamo chiamata 2x, perchè in essa fanno il doppio dei salti che mamma canguro ha fatto in ciascuna metà precedente.
Infine, sommando tutte le x e ponendole uguali a 135 (salti totali), siamo arrivati a capire che x valeva 27 salti e che quindi 2x (l'ultima metà del ritorno) valeva 54 salti.
Per trasformare i salti in metri abbiamo poi moltiplicato i 54 salti per i 4 m della loro lunghezza, quindi 54 salti per 4 m è uguale a 216 m, ovvero il percorso ~~ø~~ compiuto dal piccolo.

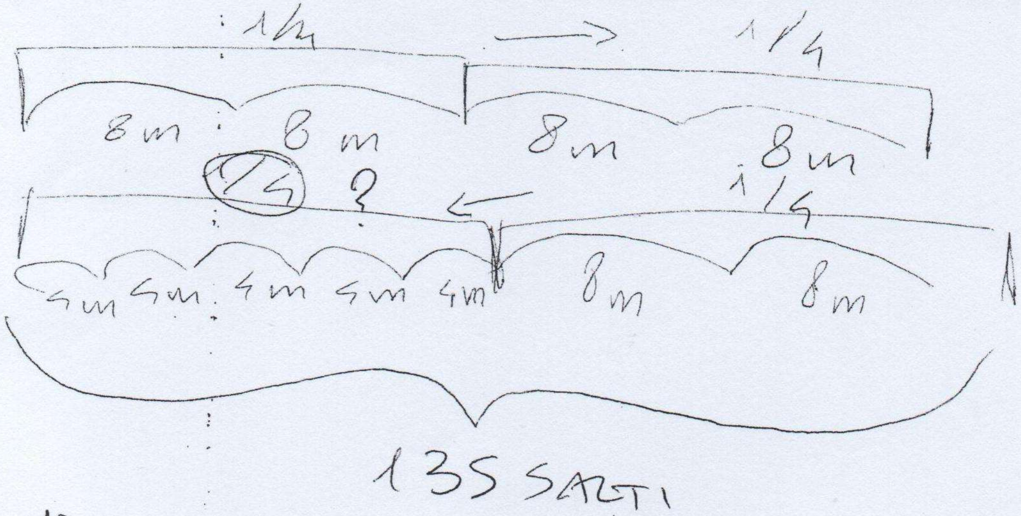


$$\frac{5x}{5} = \frac{135}{5} \Rightarrow x = \underset{\text{salti}}{27}$$

$$2x = 27 \cdot 2 = \underset{\text{salti}}{54}$$

$$\underset{\text{salti}}{54} : \underset{m}{4} = 216\ m$$

Risolvi il problema spiegando il più possibile con le tue parole il ragionamento che hai fatto.



~~$\frac{1}{4}$ 135 = 33,75~~

16,8
216

135 : 8 = 16,8
16,8 : 4 = 67,2

Congettura interpretativa?
previsionale?

e i vostri ragazzi?

Alla fine del percorso analizzeremo con voi

i loro protocolli, le loro discussioni, la loro crescita…