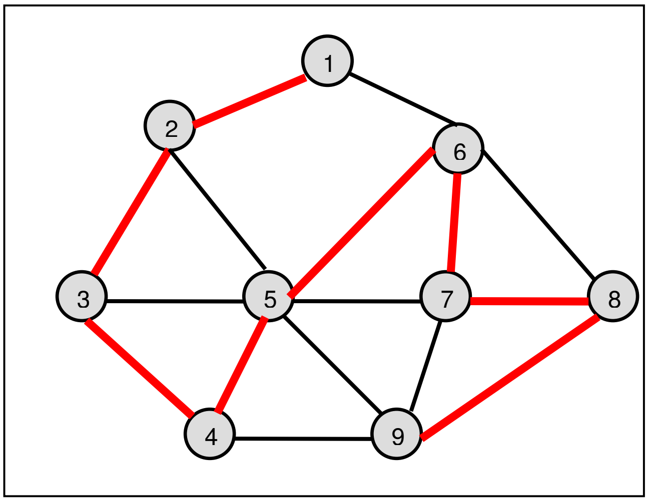
PACTA
Arsenale dei Teatri
Progetto Arte Cultura Territorio Associati

Grafi di Alberto Colorni

Quello che avete sott'occhio è un <u>grafo</u> con 9 nodi e 14 archi: <u>percorriamolo insieme</u>



1. Alcune definizioni
Un grafo è un insieme di ***nodi*** e di ***archi***, ogni arco collega una coppia di nodi, in alcuni casi è indicato un verso di percorrenza (grafo orientato). Ognuno può usare queste strutture astratte come crede, adattandole ai problemi concreti che si trova ad affrontare. In generale gli archi rappresentano legami tra i nodi: nel nostro caso indicano i collegamenti logici tra i 9 nodi.

2. Un po' di storia
Lo strumento dei grafi ha un luogo, Konigsberg, una data di nascita, il 1736, un padre, il matematico svizzero ***Eulero***: a lui venne posta una questione "enigmistica", qui ripresa nel problema P1 (vedi retro). Nell'Ottocento altri problemi e curiosità vennero proposti utilizzando i grafi (vedi problemi P2 e P3). Nella seconda metà del Novecento, con lo sviluppo dei ***calcolatori***, i grafi sono infine diventati uno strumento insostituibile per rappresentare e risolvere problemi diversissimi.

3. Teoremi o congetture?
Un teorema è un assunto dimostrato, una congettura è un assunto che non è [ancora] stato dimostrato. La questione posta nel 1736 a Eulero (P1) ha generato il ***primo teorema*** della teoria dei grafi. La questione dei 4 colori (P2) è stata per più di 100 anni una congettura, prima di essere dimostrata 30 anni fa (ma la dimostrazione è controversa, per l'intenso uso del calcolatore che ha richiesto: molti hanno affermato che una simile procedura non era verificabile).

4. Curiosità
Cosa hanno in comune il trasporto degli alunni, il Sudoku, l'organizzazione dei voli di una compagnia aerea, la pulizia della strade di una città, la metropolitana di Londra, una formula chimica, la colorazione della carte geografiche, la rete Internet? Apparentemente nulla, in realtà sono tutti rappresentabili come problemi su grafo. La ***rete del metrò***, con le sue le fermate e le sue linee, è un grafo in cui vengono ignorate alcune informazioni (per esempio le reali distanze tra le fermate) ma poste in rilievo altre (per esempio il numero delle fermate e i nodi d'interscambio). Gli ***scali aeroportuali*** sono i nodi e le ***tratte*** sono gli archi del grafo che rappresenta l'organizzazione di una compagnia aerea. I punti di ***raccolta degli alunni*** e i percorsi per raggiungerli rappresentano un grafo su cui è possibile risolvere il problema di trovare il percorso più veloce. Le ***molecole*** e i legami sono spesso presentate come grafi. La rete ***Internet*** è il caso forse più noto: il grafo evidenzia i nodi con gli ***indirizzi dei siti*** - ormai un numero elevatissimo - e gli archi con i ***link*** che collegano un sito a un altro; quando cerchiamo una parola con un motore tipo Google veniamo diretti su alcuni nodi e da lì …

5. Esistenza & ottimizzazione
L'approccio della matematica classica punta a dimostrare l'***esistenza*** (spesso l'esistenza e l'unicità) della soluzione di un problema: quindi ha una risposta sì/no. L'approccio della matematica applicata è invece la ricerca, tra le varie soluzioni possibili, della cosiddetta ***soluzione ottima***, cioè di quella che si comporta meglio di tutte le altre rispetto a un certo obiettivo. Per esempio la ricerca del percorso più breve per pulire le strade di un quartiere è la riformulazione del problema di Eulero (P1) come problema di ottimizzazione.

6. Il modello
Il modello dei grafi è strettamente legato allo sviluppo della cosiddetta ***matematica discreta***, il caso cioè in cui le variabili possono assumere solo un numero finito (di solito piccolo) di valori. Ciò significa che anche le soluzioni possibili sono un numero finito. Per esempio, in un grafo di 4 nodi ci sono solo 4! = 4*3*2*1 = 24 percorsi che visitano tutti i nodi una volta sola. I modelli basati sui grafi hanno innumerevoli applicazioni. Qui ne indichiamo due: questioni di ***percorsi*** (nodo 7) e questioni di ***comunicazione*** (nodo 8).

7. Applicazioni al territorio
In questo caso il grafo schematizza il mondo fisico (tralasciandone ovviamente molti aspetti): i nodi sono i comuni o le aree d'interesse o gli ***incroci***, gli archi sono le ***strade*** di collegamento (nel caso di senso unico l'arco è orientato). Sul grafo si descrivono molti problemi di percorsi ottimi (per es. la strada più breve da A a B) oppure di scelta di sottografi, cioè di parti del grafo con opportune caratteristiche.

8. Applicazioni alle reti sociali
Come detto, Internet è un (gigantesco) grafo. Le scelte di come re-indirizzare i messaggi sulla rete o di come recuperare da banche-dati differenti le varie parti di un ***database*** sono problemi di ottimizzazione su grafo. Ma anche le ***relazioni tra le persone*** si possono rappresentare con i grafi: in questo caso, per esempio, si può associare a ogni arco l'affinità (o il contrasto) tra i due nodi collegati.

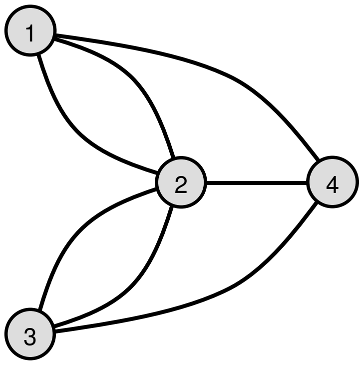
9. Oggi
Lo spettacolo teatrale che vedrete mescola due problemi, entrambi risolti utilizzando i grafi come ***strumento di astrazione*** dalla realtà: il detective "isola" alcuni aspetti delle questioni e usa i grafi come loro rappresentazioni, una territoriale e l'altra sociale.

Ecco, abbiamo visitato i nodi del nostro grafo seguendo il percorso (in rosso): 1-2-3-4-5-6-7-8-9.

A questo punto provate a risolvere i tre problemi descritti sul retro: fanno parte della storia dei grafi !

Problema P1

Questo è il grafo che rappresenta la città di **Konigsberg** (dove visse Kant e dove soggiornava **Eulero nel 1736**) con i 7 ponti che collegavano le 4 parti della città. E' possibile fare un percorso chiuso (che cioè parte e arriva nello stesso nodo) senza mai attraversare più di una volta ognuno dei 7 ponti ?



Problema P2

Questa è la carta geografica della Lombardia, con le sue 11 province. E' possibile colorarla con **esattamente k colori** in modo che due province confinanti non abbiano lo stesso colore ? Quale risulta essere il valore minimo possibile per k ? Cioè bastano 5 colori ? 4 ? 3 ? E infine, come si potrebbe fare un ragionamento generale (un modello) ?

Problema P3

Questo grafo rappresenta un territorio comunale con 7 frazioni, in cui si devono raccogliere gruppi di alunni per portarli alla scuola posta nel nodo 1. E' possibile, con un mezzo che parte da 1, raccogliere gli alunni di tutte le frazioni **senza ripassare mai due volte** dallo stesso nodo (cioè dalla stessa frazione), tornando poi al nodo 1 di partenza ?