Appuntamento al limite

Paola Magnaghi - Tullia Norando

Laboratorio FDS
Dipartimento di Matematica
Politecnico di Milano

Sir Isaac Newton

25 /12/1642-20 /03/1727 (calendario giuliano)
04/01/1643 - 31/03/1727 (calendario gregoriano)

Sir Isaac Newton

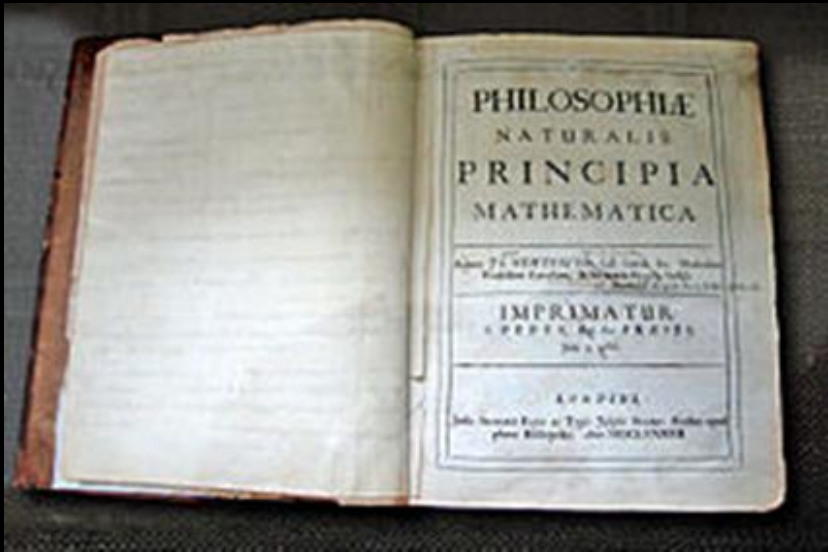
1645 : la madre Anna Ayscough sposa Barnabas Smith

1652 : morte del patrigno

Sir Isaac Newton

1665 : inizio studio calcolo infinitesimale

1687: pubblicazione del libro
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica



Sir Isaac Newton

Quantitates Mathematicas, non ut ex partibus quam minimis costantes, sed ut motu continuo descriptas hic considero.... Nunc in posterum *Fluentes* vocabo quantitates has, quas considero tanquam gradatim, & indefinite crescentes ... At Velocitates, quibus singulae Fluentes augentur per Motum generantem (quas Velocitates appello *Fluxiones,* aut simpliciter *Velocitates*...

Sir Isaac Newton

Newton vede l'equazione $F(x,y) = 0$ di una curva come una relazione che regola le loro variazioni relative; in altre parole, egli considera le variabili x ed y come delle quantità ***fluenti*** correlate dall'equazione data. Egli introduce quindi due nuove grandezze x' ed y', che sono le velocità istantanee, o ***flussioni***, delle variabili.

Sir Isaac Newton

La velocità istantanea è l'ultimo rapporto di quantità evanescenti.
Per ultimo rapporto di quantità evanescenti s'intende il rapporto di queste quantità, non prima che svaniscano, né dopo che sono svanite, ma nell'istante stesso in cui svaniscono.

Gottfried Wilhelm von Leibniz

01/07/1646- 14/11/1716

Gottfried Wilhelm von Leibniz

1672-1676 : visse a Parigi

1673: presentò alla Royal Society la prima calcolatrice meccanica per effettuare moltiplicazioni e divisioni

1675 : calcola il primo integrale

Gottfried Wilhelm von Leibniz

1675: usò per la prima volta il simbolo di integrale

1704 : *Nuovi saggi sull'intelletto umano*

1710 : *Teodicea*

1714: *Monadologia*

Gottfried Wilhelm von Leibniz

Ex cognito hoc velut *Algorithmo,* ut ita dicam, calculi huius, quern voco ***differentialem,*** omnes aliae aequationes differentiates inveniri possunt per calculum communem, maximaeque et minimae, itemque tangentes haberi, ita opus non sit tolli fractas ac irrationales, aut alia vincula, quod tamen faciendum fuit secundum Methodos hactenus editas

Gottfried Wilhelm von Leibniz

Una volta noto l'Algoritmo, per cosi dire, di questo calcolo, che chiamo ***differenziale***, tutte le altre equazioni differenziali si possono ottenere mediante il calcolo comune, e così trovare i massimi e i minimi, nonché le tangenti, senza che vi sia bisogno di eliminare le quantità fratte o irrazionali, o altri impicci, come invece si doveva fare con i metodi finora pubblicati.

Gottfried Wilhelm von Leibniz

Il termine **funzione** è stato introdotto da Leibniz nel 1694, per denotare una quantità collegata ad una curva, come la pendenza o uno specifico punto di una curva.
Le funzioni considerate da Leibniz oggi sono chiamate più particolarmente ***funzioni differenziabili*** e costituiscono il tipo di funzione più frequentemente impiegato nelle applicazioni. Per questo tipo di funzione, si possono considerare limiti e derivate; entrambe queste nozioni costituiscono la base del calcolo infinitesimale.

Jean Baptiste Le Rond d'Alembert

16/11/1717- 29/10/1783

Jean Baptiste Le Rond d'Alembert

1741: entra all' Acadèmie des Sciences

1743: pubblica il Traitè de la dynamique

1751: esce il primo tomo dell' Encyclopédie

Jean Baptiste Le Rond d'Alembert

Una quantità è qualcosa o è nulla; se è qualcosa, non è ancora svanita; se è nulla, allora è letteralmente già svanita.
La supposizione che esista uno stadio intermedio fra questi due è una chimera.

George Berkeley

12/03/1685-14/01/1753

George Berkeley

1710 :Trattato sui principi della condizione umana

1728 : partenza per le Bermuda

George Berkeley

1734: The Analyst

sottotitolo : Or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician. Wherein It Is Examined Whether the Object, Principles, and Inferences of the Modern Analysis Are More Distinctly Conceived, or More Evidently Deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith. «First Cast the Beam Out of Thine Own Eye; and Then Shalt Thou See Clearly to Cast Out the Mote Out of Thy Brother's Eye»

George Berkeley

E che cosa sono questi incrementi evanescenti? Non sono né quantità finite né quantità infinitamente piccole, né si riducono a nulla. Non potremmo chiamarli i fantasmi di quantità defunte?

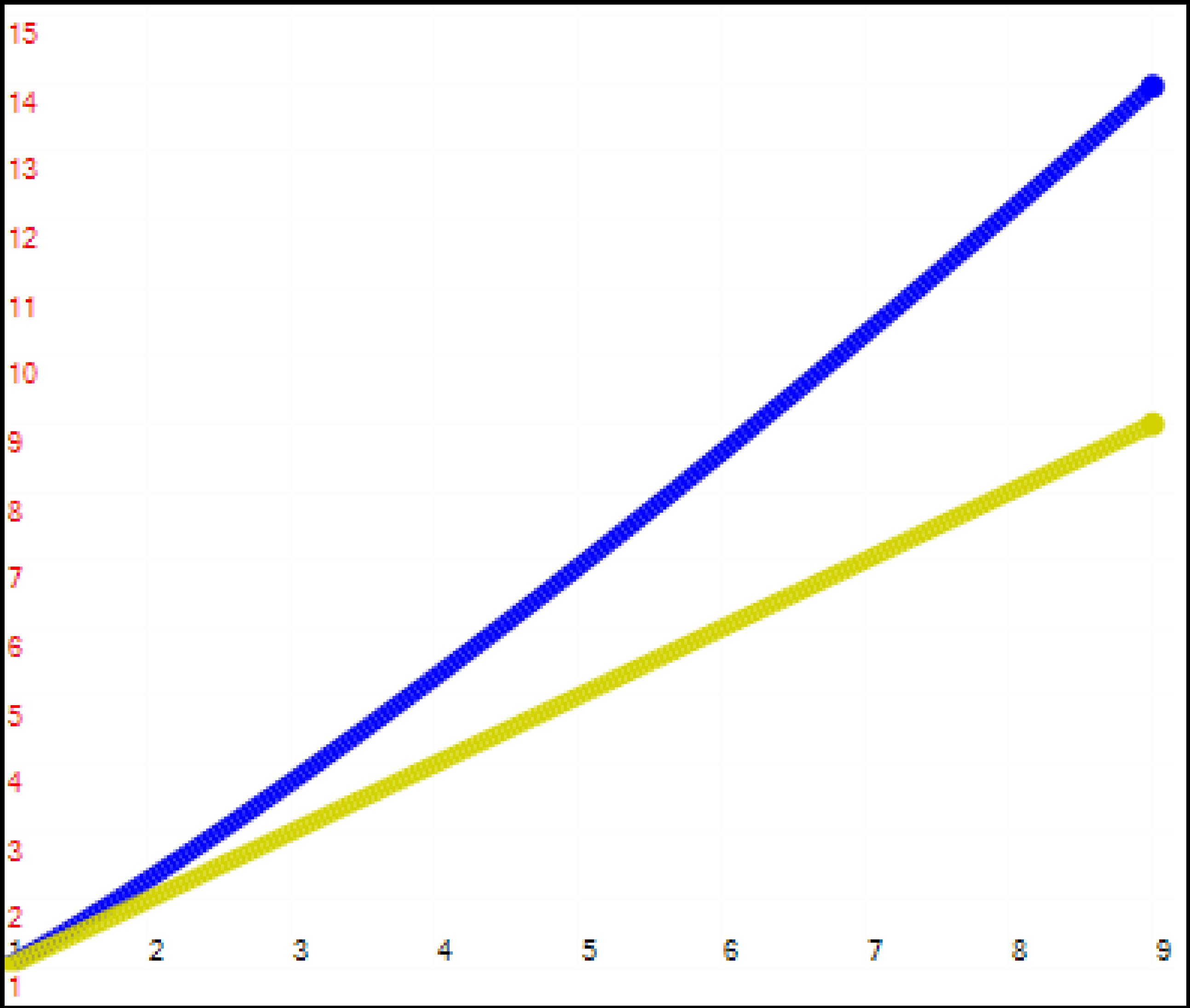
Funzioni

Metà del XVIII secolo
Eulero usa la parola ***funzione*** per descrivere una espressione o una formula che coinvolge vari argomenti.
XIX secolo formalizzazione
Karl Weierstrass costruisce il calcolo infinitesimale a partire dall'aritmetica e non dalla geometria.
Fine del XIX secolo
formalizzazione attraverso la teoria degli insiemi.
Dirichelet dà la moderna definizione "formale" di funzione.

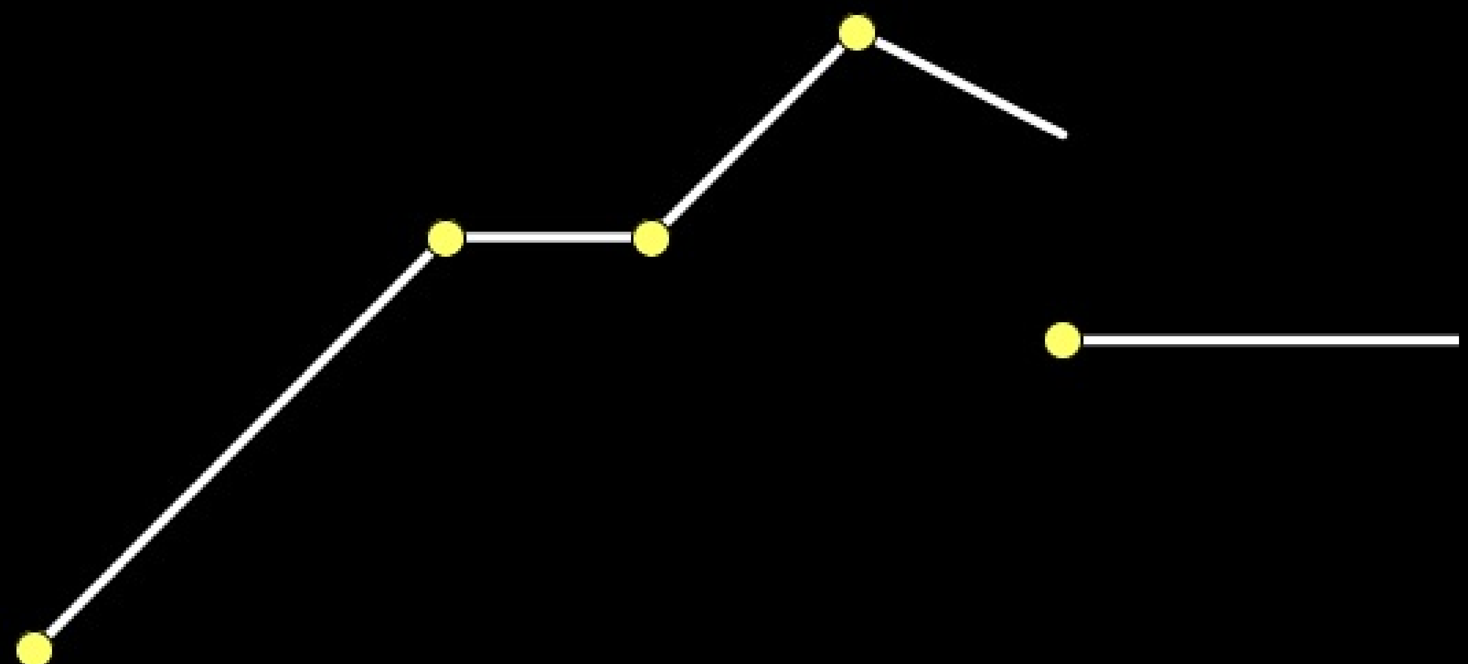
Studio di Funzione 1

- Funzione lineare e potenza
- Funzione discontinua 1
- Funzione discontinua 2

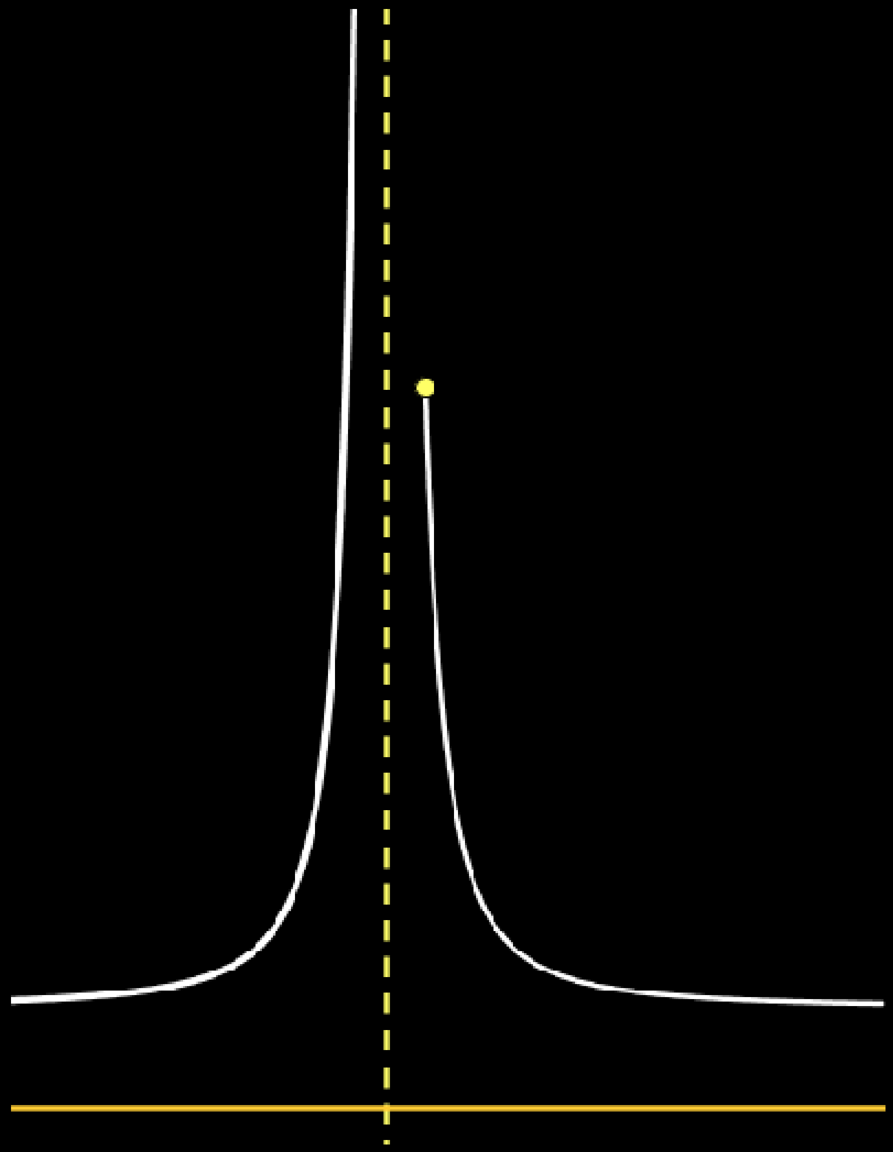
Funzione lineare e potenza


15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Funzione discontinua 1
cammina, cammina



Funzione discontinua 2
L'esplosione



Augustin Louis Cauchy

21/08/1789- 23/05/1857

Augustin Louis Cauchy

1830: esilio in Svizzera e poi a Torino
1833: si stabilisce a Praga
1838: ritorno a Parigi

1821: *Cours d'analyse*

1823: *Le calcul infinitésimal*

1826: *La geométrie*

Augustin Louis Cauchy

Quando i successivi valori attribuiti a una variabile si approssimano indefinitivamente a un valore fisso, tanto che alla fine differiscono da esso quanto si desidera, questa quantità è denominata il limite di tutte le altre

Augustin Louis Cauchy

TROISIÈME LEÇON.

DÉRIVÉES DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

Lorsque la fonction $y = f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x, et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l'on pose alors $\Delta x = i$, les deux termes du *rapport aux différences*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \tag{1}$$

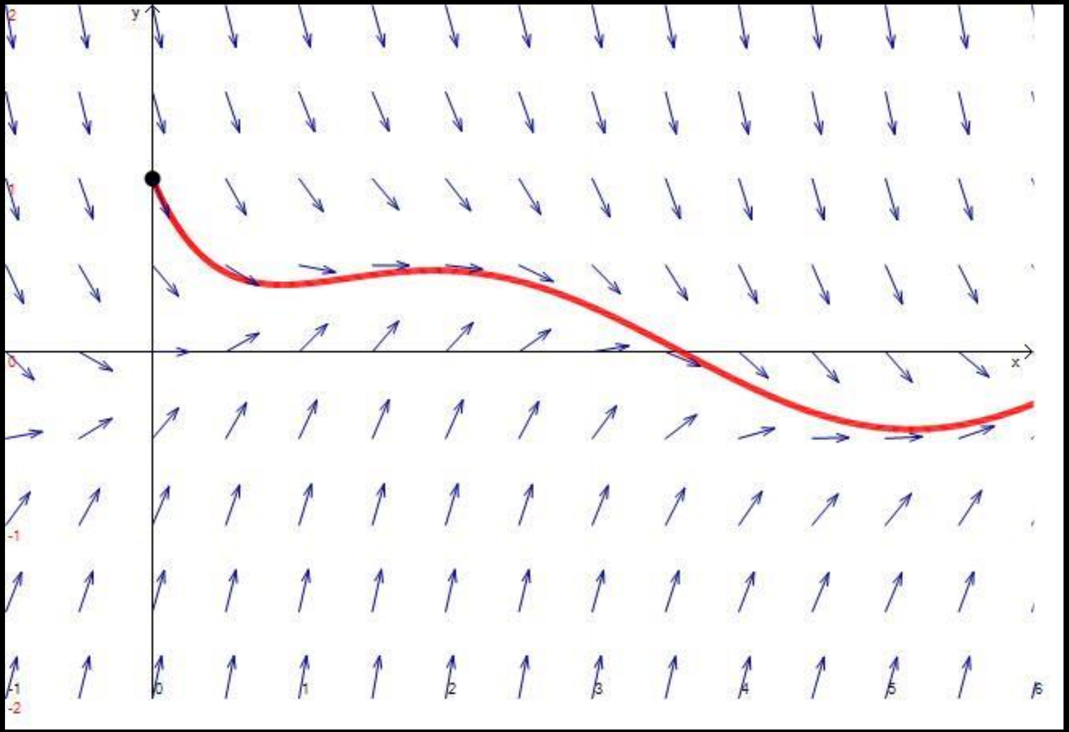
seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative. Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée pour chaque valeur particulière de x; mais elle varie avec x.

la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ dépendra de la forme de la fonction proposée $y = f(x)$. Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de *fonction dérivée*, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation

$$y' \quad \text{ou} \quad f'(x).$$

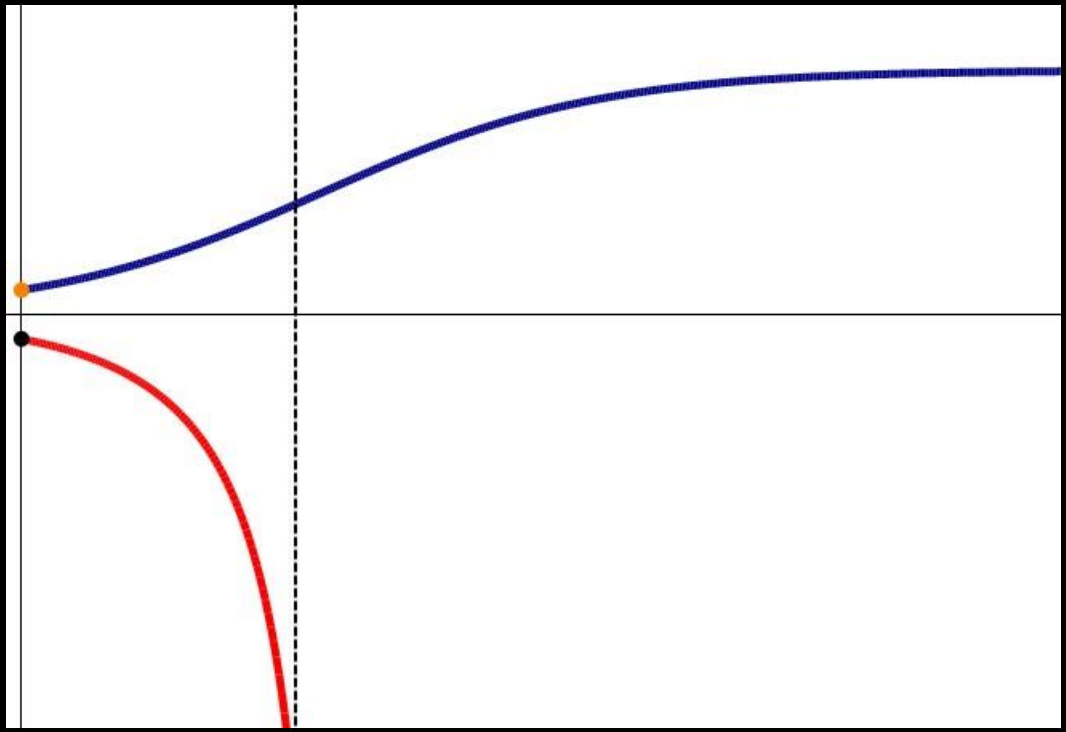
Previsioni

$$y' = -2y + \sin t$$



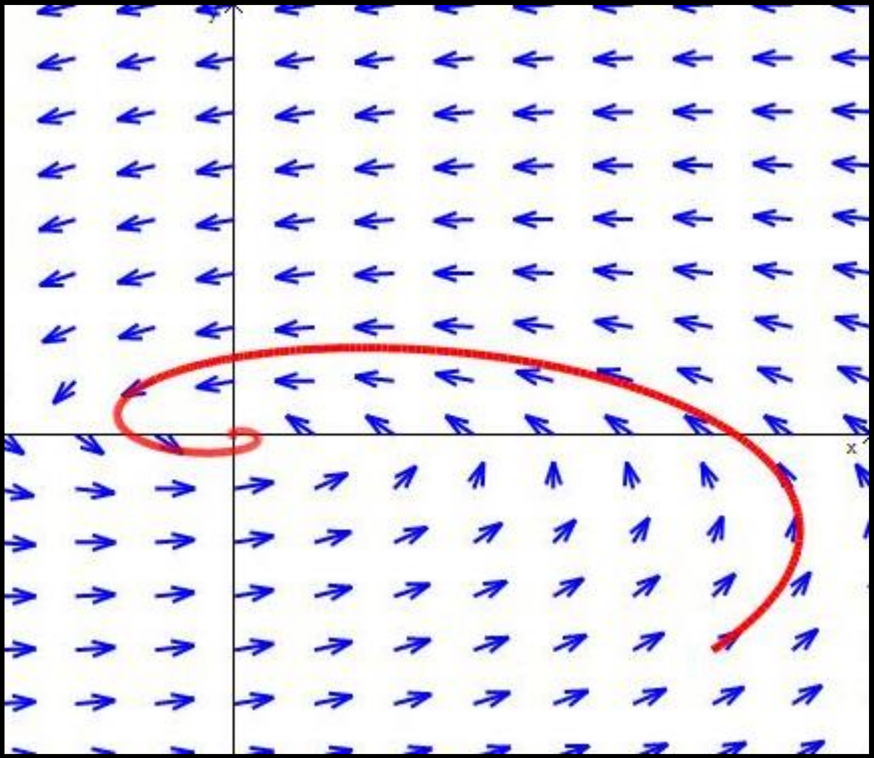
Piccoli cambiamenti

$$y' = 2y - y^2$$



Dinamiche di coppia

$$\begin{cases} x' = & -x - 4y \\ y' = & x - y \end{cases}$$



Dinamiche di coppia