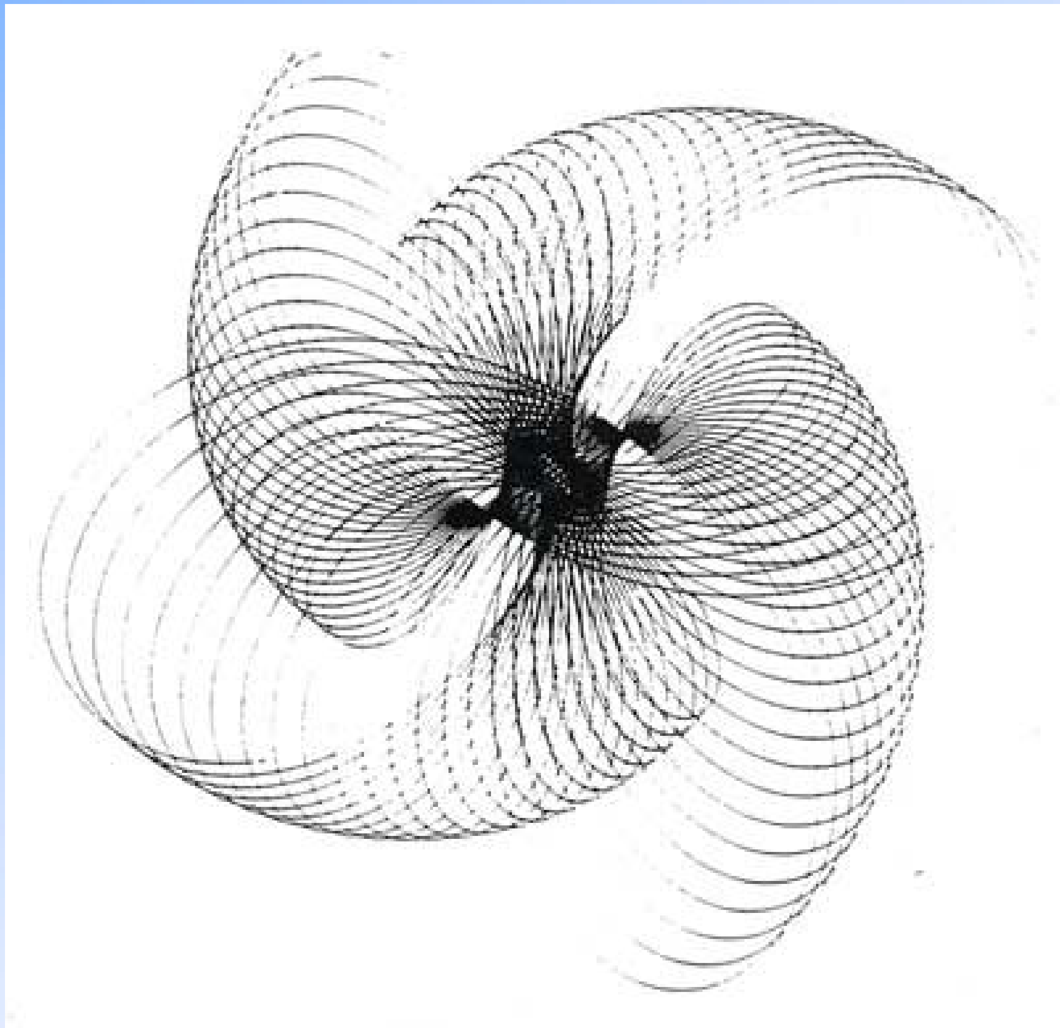
La simmetria come valore didattico



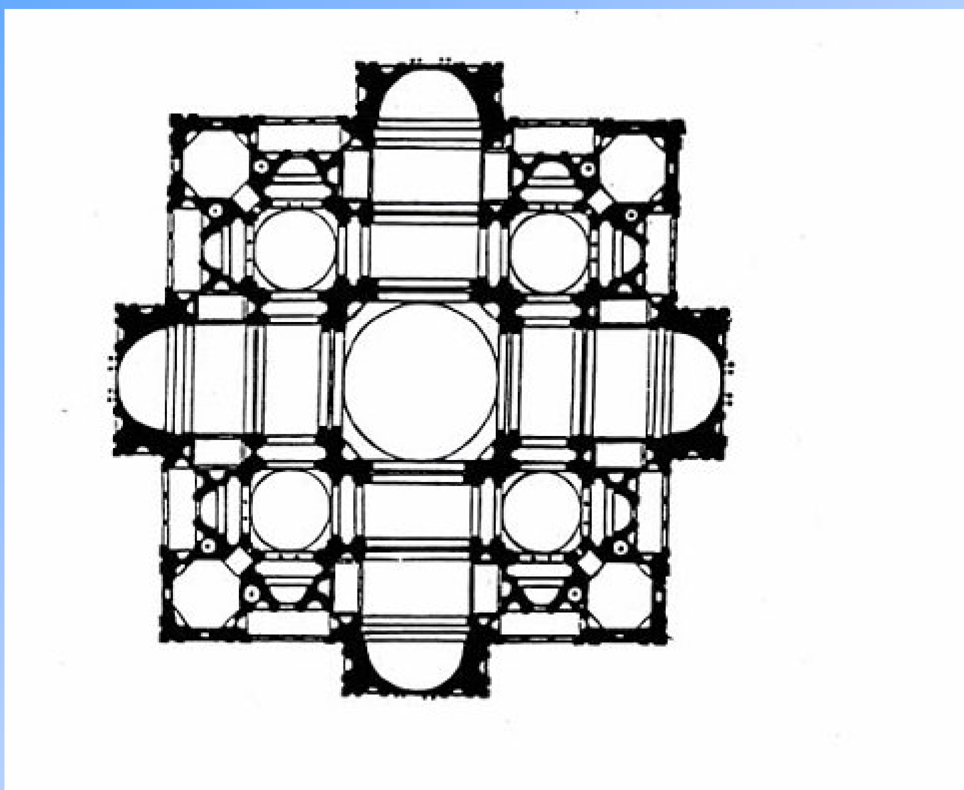
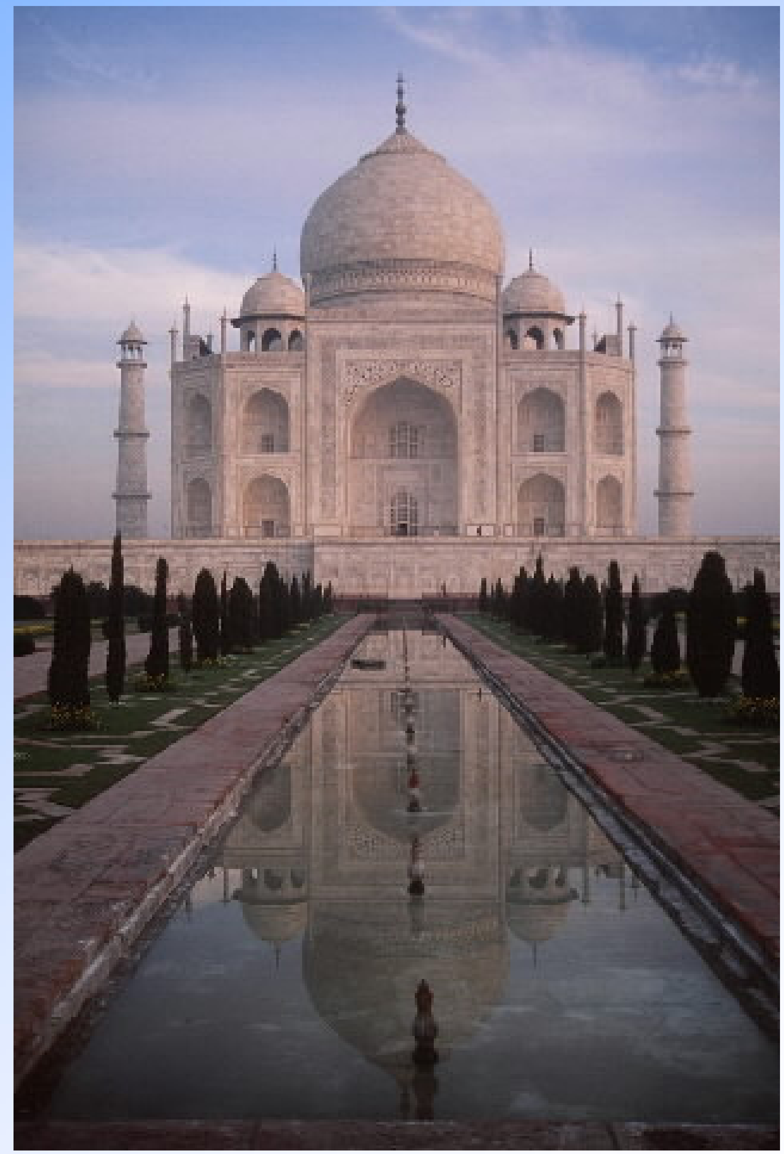
Renato Betti
Milano, 7 maggio '07

<u>Simmetria</u> – proprietà di figure geometriche in cui i punti corrispondenti si trovano allineati da parti opposte e alla stessa distanza rispetto a un punto (detto *centro di simmetria*), a una retta (*asse di simmetria*) o ad un piano.

(**fig.**) disposizione, collocazione ordinata e armonica delle parti che costituiscono un insieme.
Sinonimi: armonia, equilibrio, proporzione.

(etim.)
Dal greco *Syn* "con, insieme" e un deivato di *metron*, "misura"

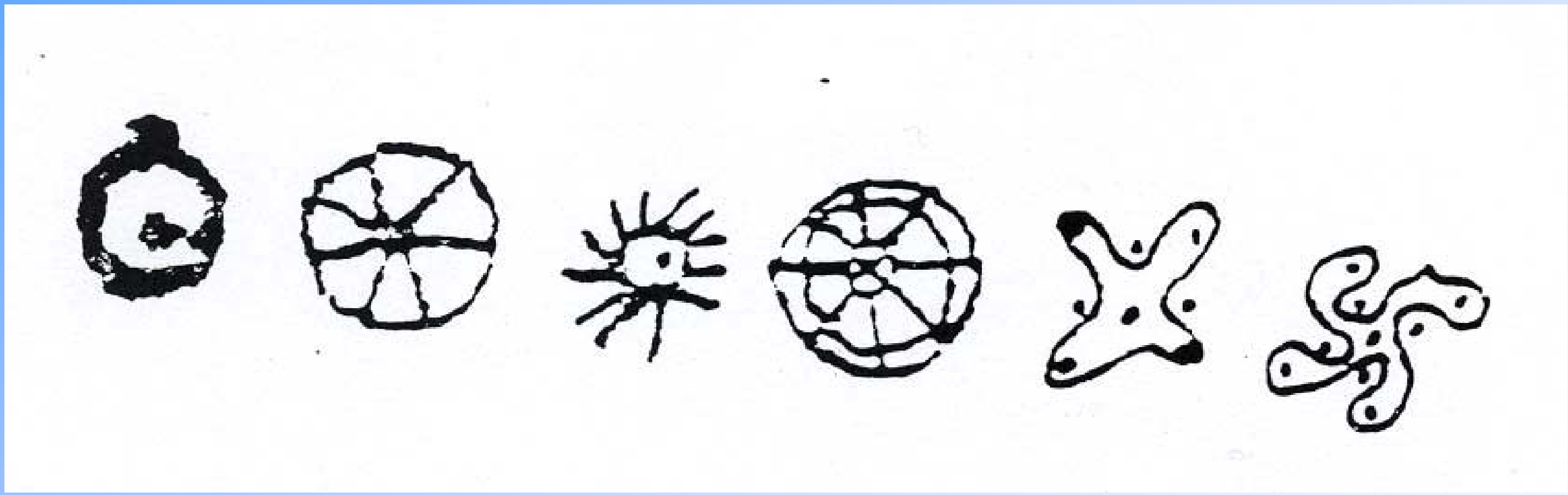
Per capire il ruolo che la simmetria ha per la scienza, è sempre utile aver presente il ruolo che ha per la natura, per l'arte o per la maniera che l'uomo ha di riguardare i fenomeni sia naturali che artificiali.

Sembra che per lungo tempo ci sia limitati ad osservare le simmetrie della natura e degli oggetti artificiali e che rararmente questa ricerca abbia superato lo stadio di metafora.

Ma è una metafora che suggerisce e sostiene principi di natura scientifica e che puo anche assumere un ruolo operativo e valori didattici.

Variazioni sul tema del sole



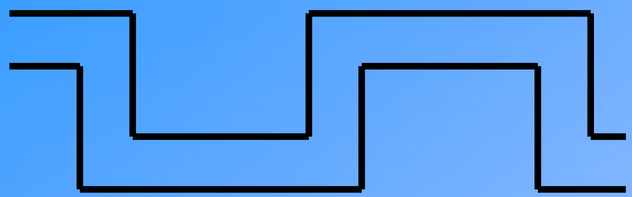
Tre maniere per analizzare il valore didattico della simmetria. È un potente metodo per:

1. **Geometrizzare la fisica**
2. **Visualizzare la matematica**
3. **Suggerire principi scientifici**

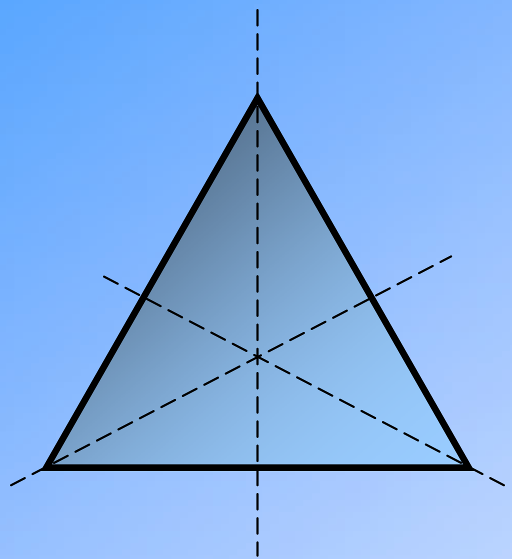
La riflessione scientifica aggiunge all'idea di simmetria un elemento dinamico: un gruppo di trasformazioni dell'ambiente. Una simmetria di un oggetto F è una trasformazione del gruppo che muta in sé la figura.

$$T(F) = F$$

Linguaggio



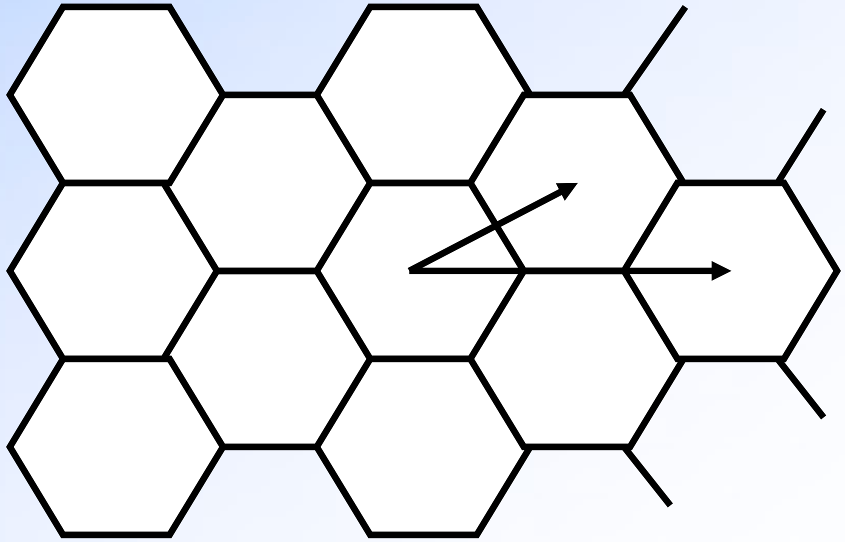
pmg2 (posizionale)



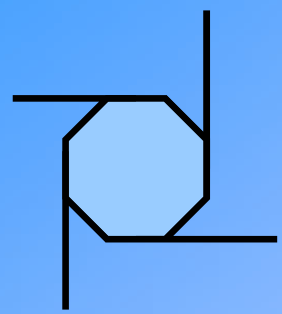
$$\mathbf{D_3=\{\sigma,\ \rho \mid \sigma^2=\rho^3=id,\ \rho^2\sigma=\sigma\rho\}}$$

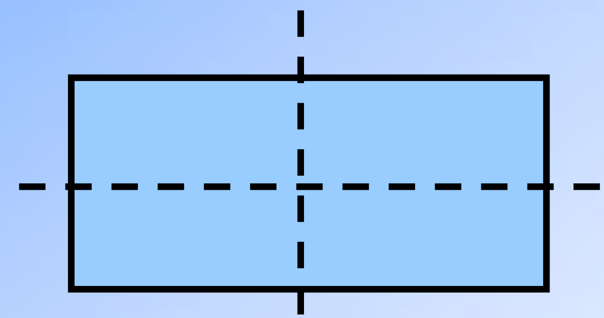
(algebrico)

(geometrico)



"Quanta" simmetria ha una figura ?





$\{id\ ,\ \rho_{\pi/2}\ ,\ \rho_{\pi}\ ,\ \rho_{3\pi/2}\}$

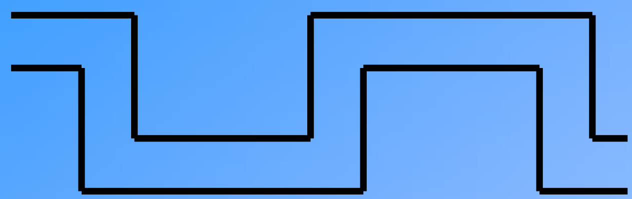
$\{id\ ,\ \rho_{\pi}\ ,\ \sigma_1\ ,\ \sigma_2\}$

Per ottenere una "misura" della simmetria non è sufficiente contare il numero di isometrie che portano la figura in sé.

Bisogna anche tener conto di come si compongono e della loro parità.

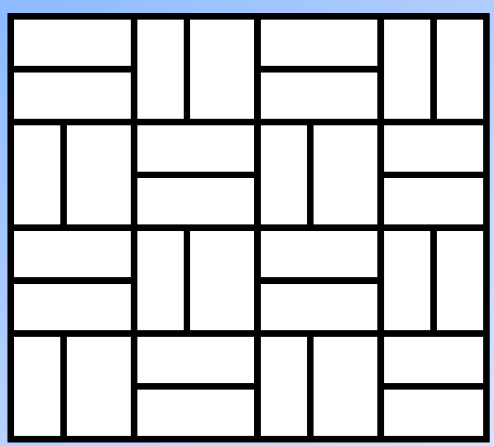
I numeri misurano dimensioni, i gruppi misurano la simmetria.

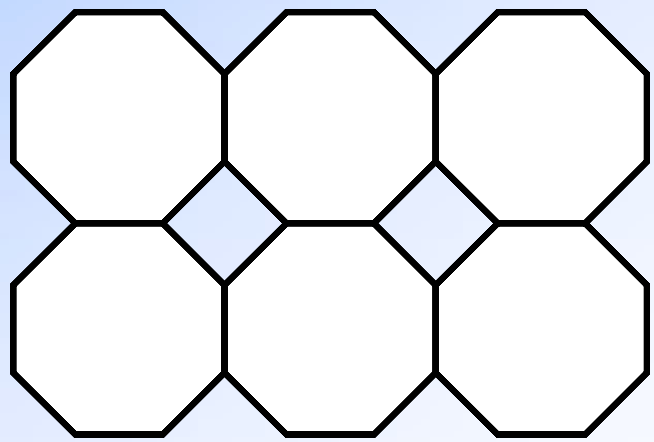
Riconoscere modelli apparentemente diversi



....↑↓↑↓↑↓↑↓↑↓↑....

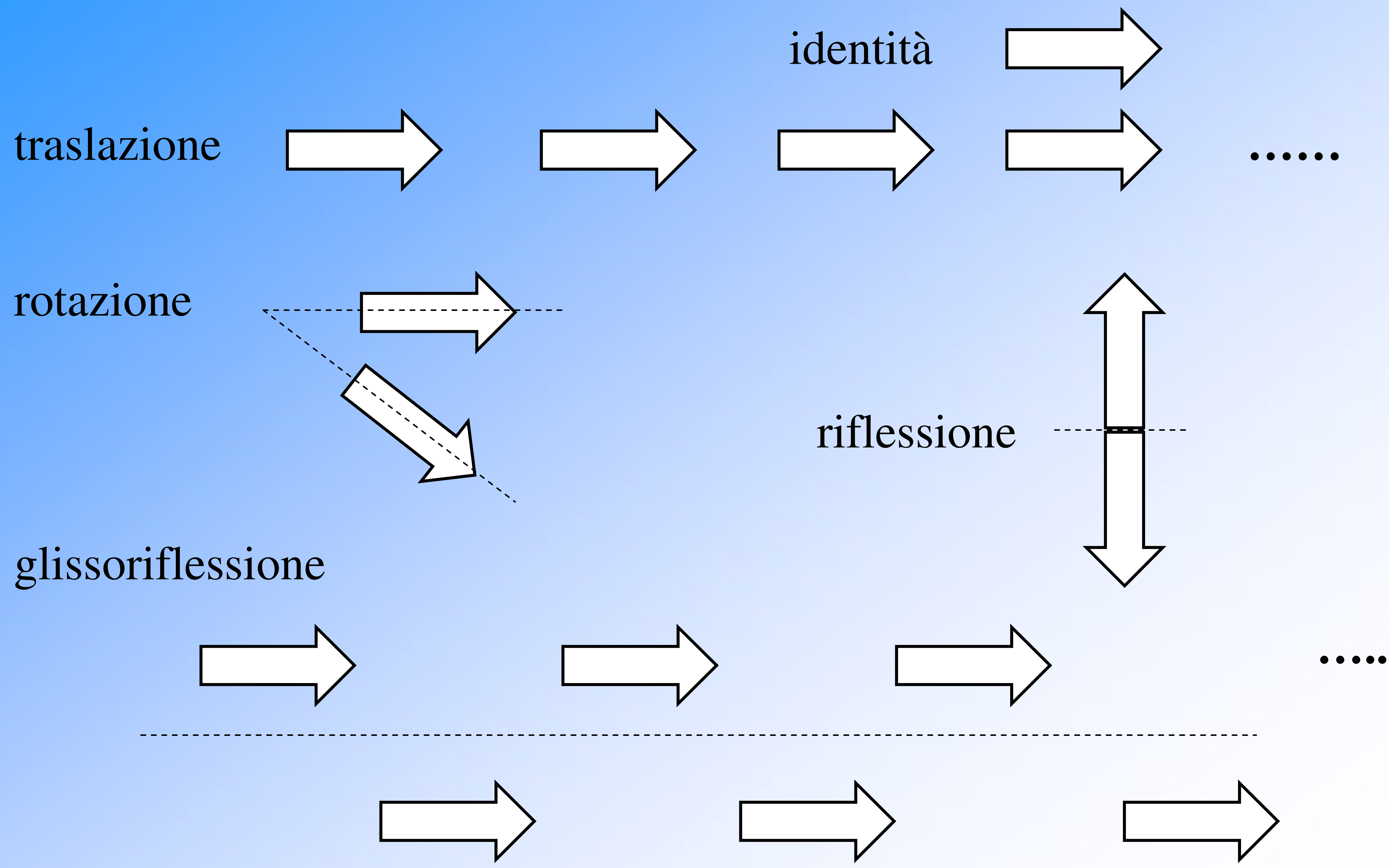
(fregi)



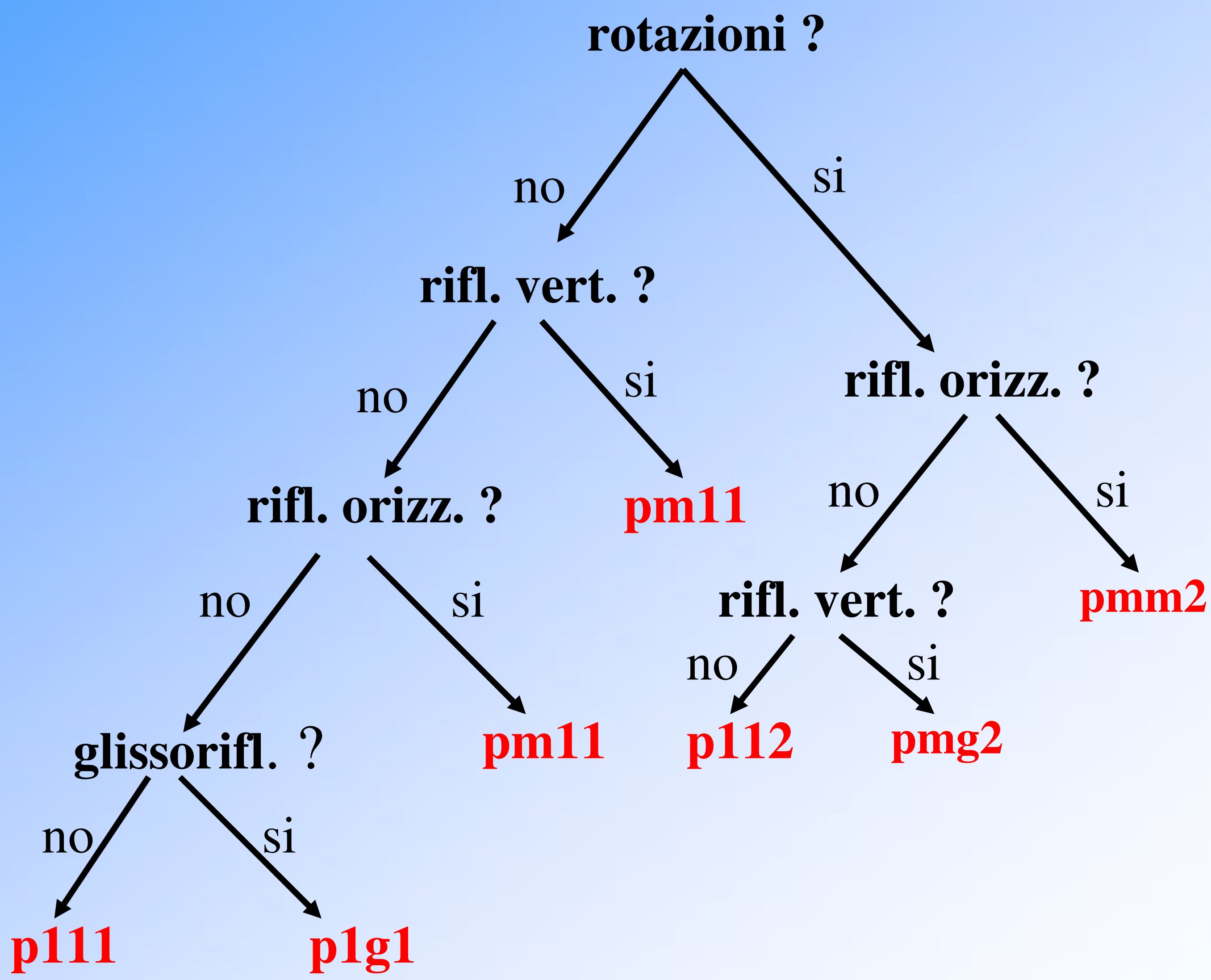


(mosaici)

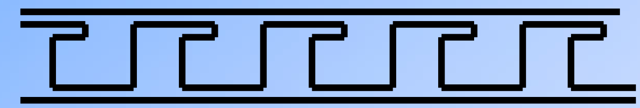
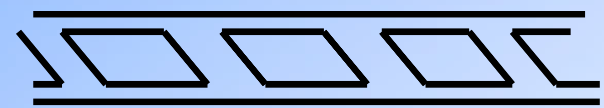
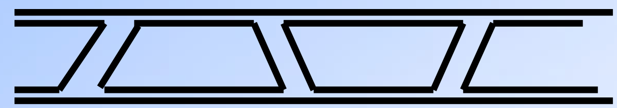
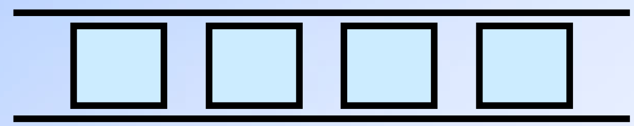
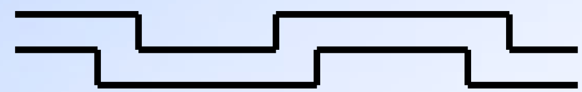
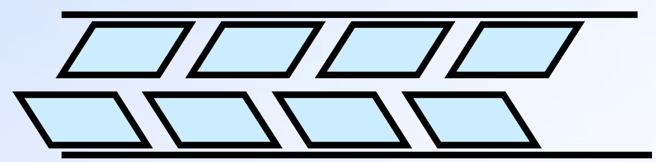
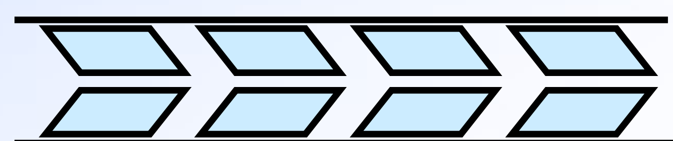
Classificare: le isometrie del piano



Classificazione dei fregi



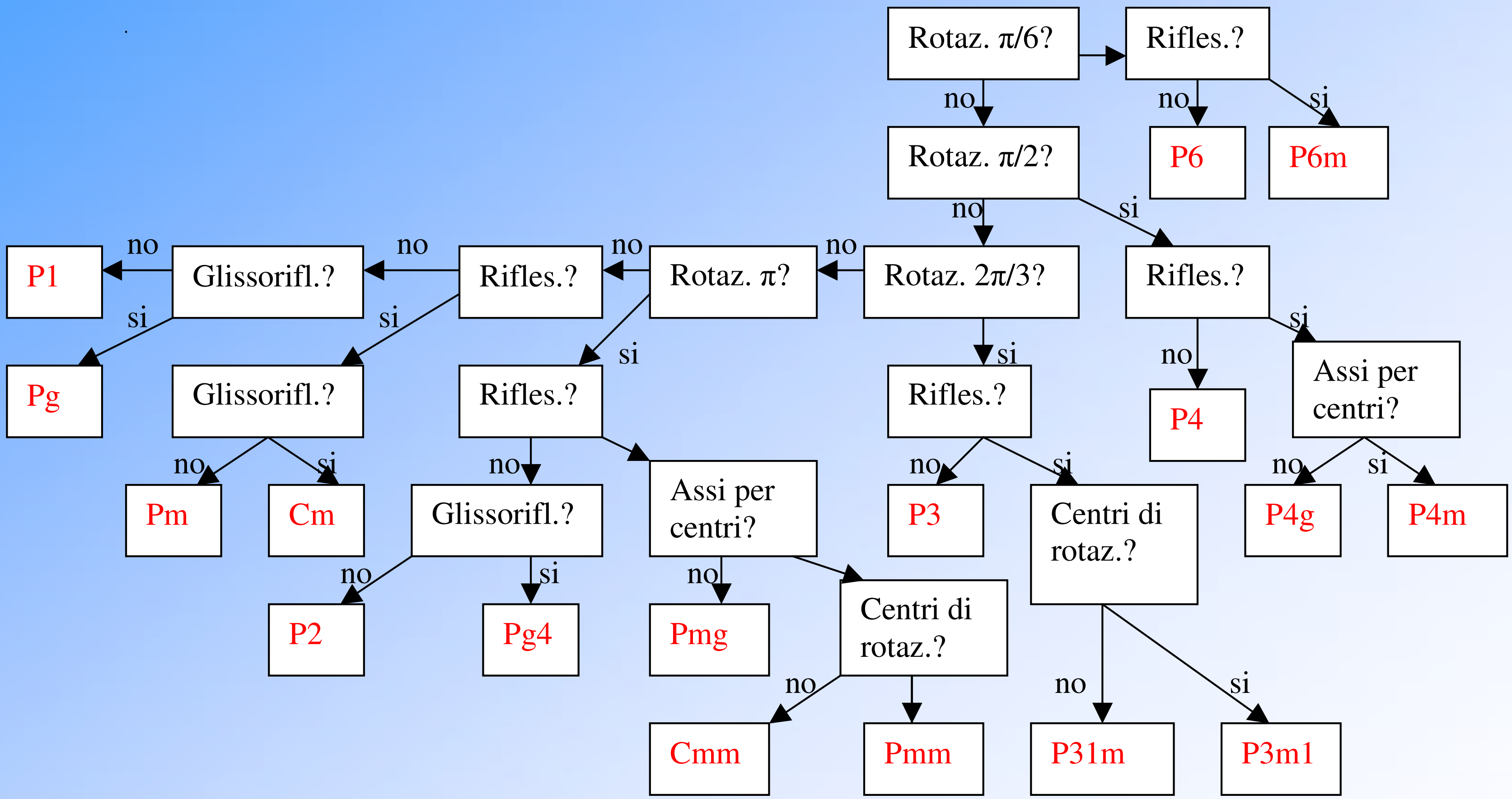
I 7 gruppi dei fregi

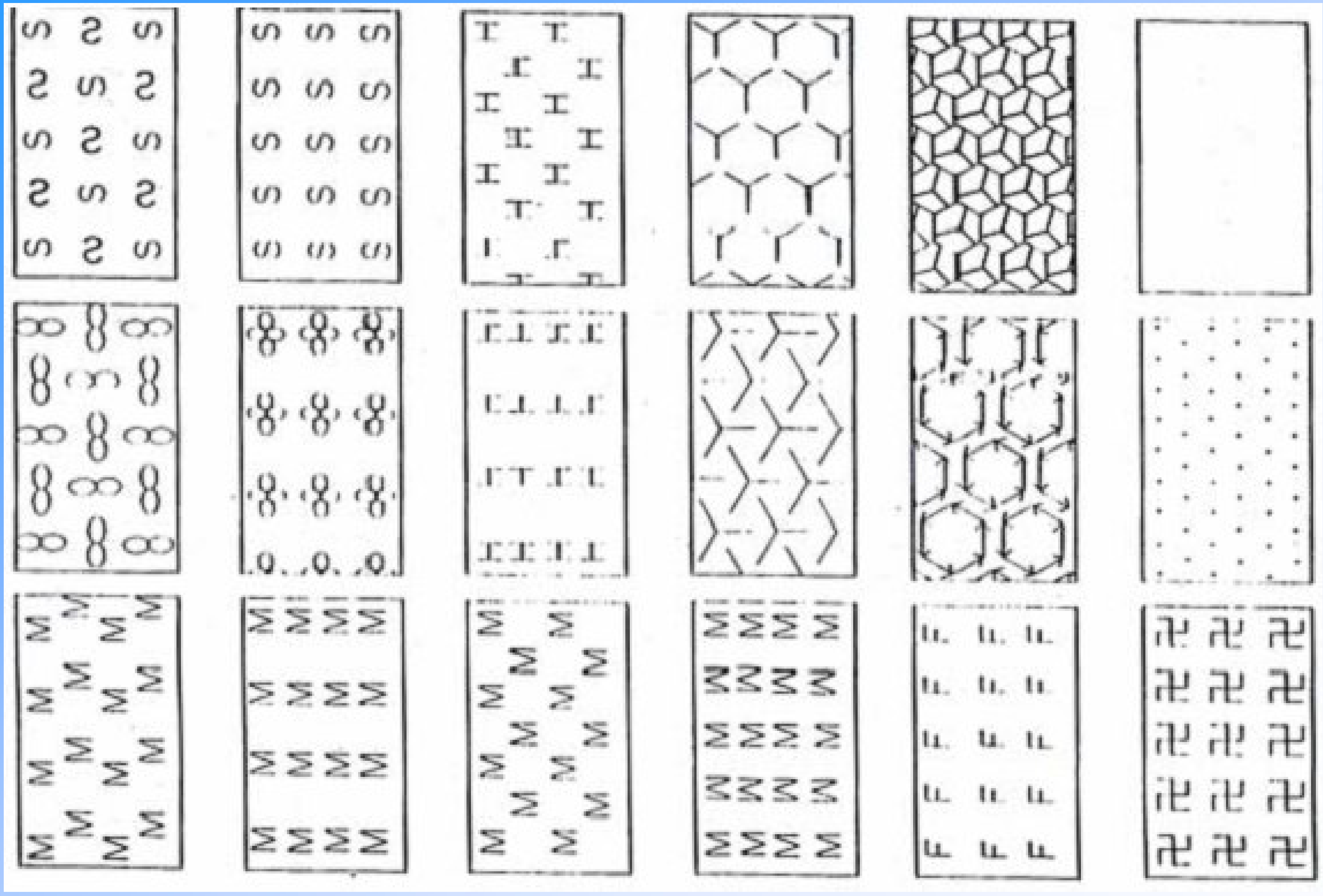
P111	**...PAPAPAPA…**	
P112	**….NONONONO…**	
Pm11	**...MAMAMAM…**	
Pmm2	**….HOHOHOHO….**	
Pmg2	**…..↑↓↑↓↑↓↑↓….**	
P1g1	**…..↑E↓E↑E↓E...**	
Pm11	**…..OKOKOK...**	

Locale / globale

Restrizione cristallografica : le rotazioni dei mosaici possono avere ordine 1, 2, 3, 4 oppure 6 (ma non 5)

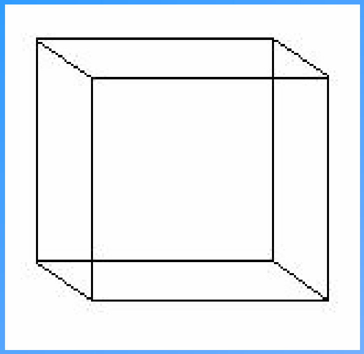
I gruppi cristallografici piani



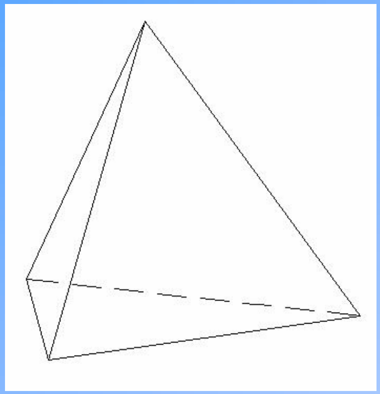


I 17 modelli di simmetria piana (carte da parati)

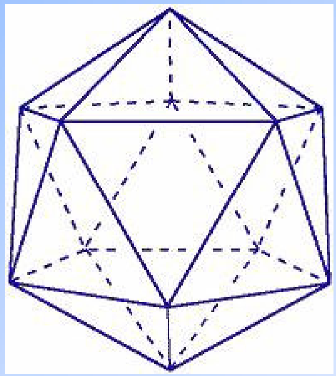
I solidi platonici e la teoria delle essenze specifiche



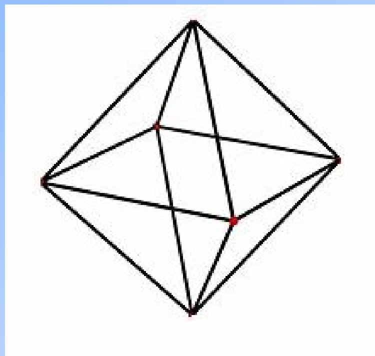
terra



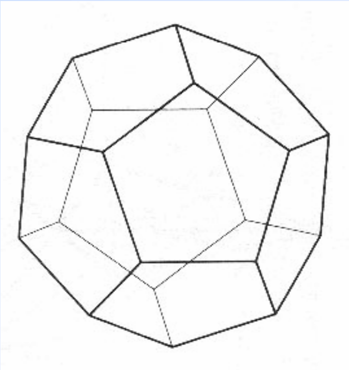
fuoco



aria



acqua

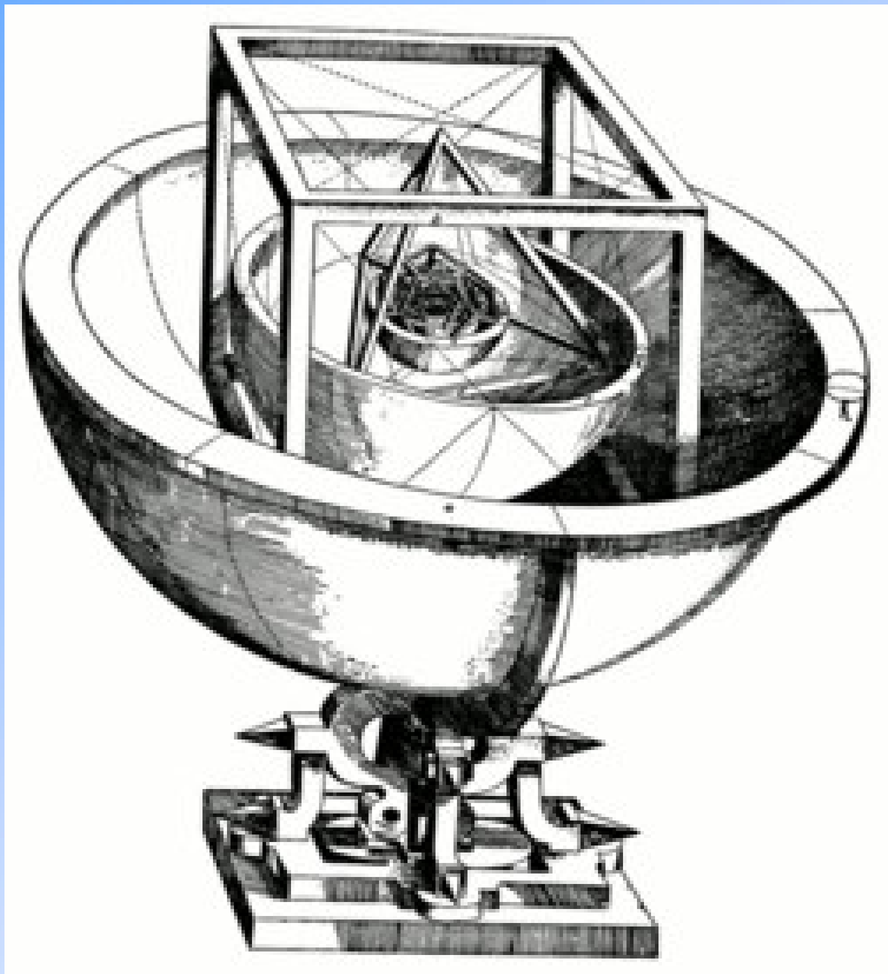


etere
(modello di universo)

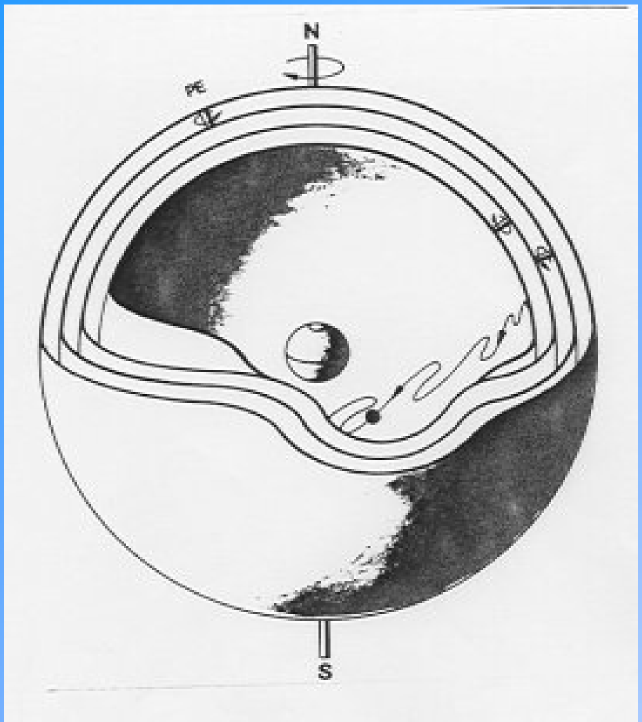
Nella teoria platonica delle essenze specifiche, si trova espressa forse per la prima volta l’idea che le strutture geometriche regolari possano gettare luce sulla natura profonda degli oggetti fisici.

I poliedri regolari come modello delle relazioni spaziali vengono utilizzati anche dal giovane Keplero.

Misterium cosmographicum
Johannes Kepler (1597)

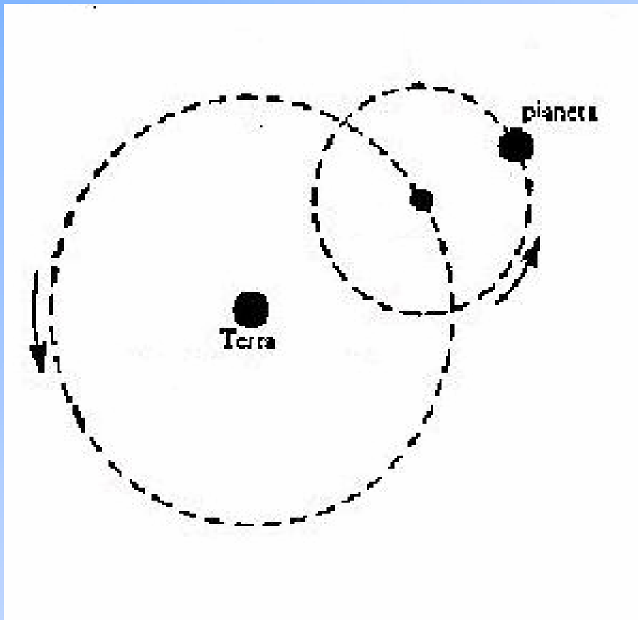


Un misto di efficacia ed estetica aveva suggerito ai filosofi greci l’idea di descrivere il moto apparente degli astri con composizioni di traiettorie circolari attorno alla terra.



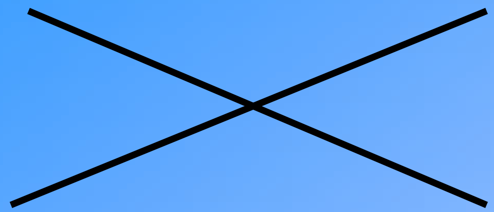
Modelli cosmologici

Le sfere omocentriche di Eudosso da Cnido

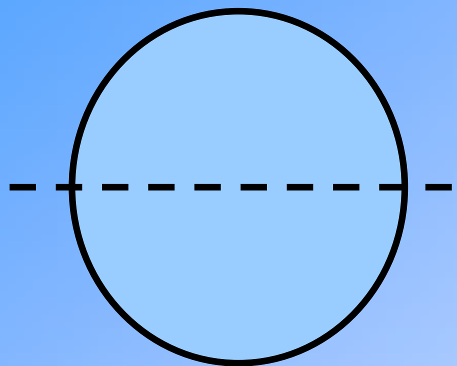


Gli epicicli di Claudio Tolomeo

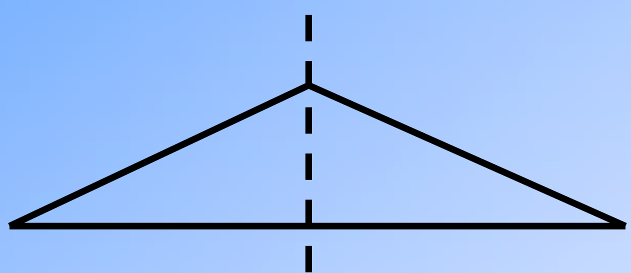
I teoremi di Talete da Mileto



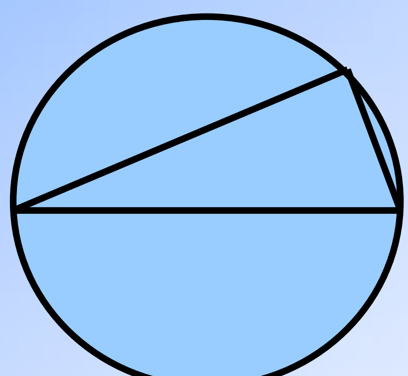
Angoli opposti al vertice sono uguali



Un diametro divide il cerchio in due parti uguali

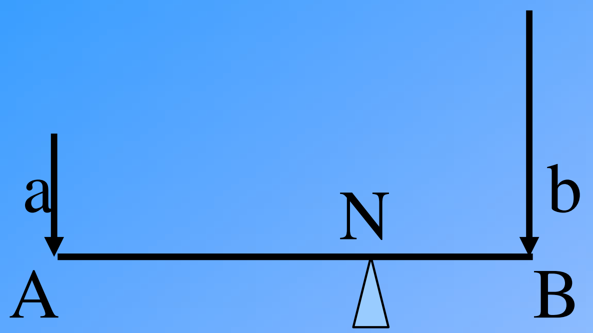


Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali (*pons asinorum*)



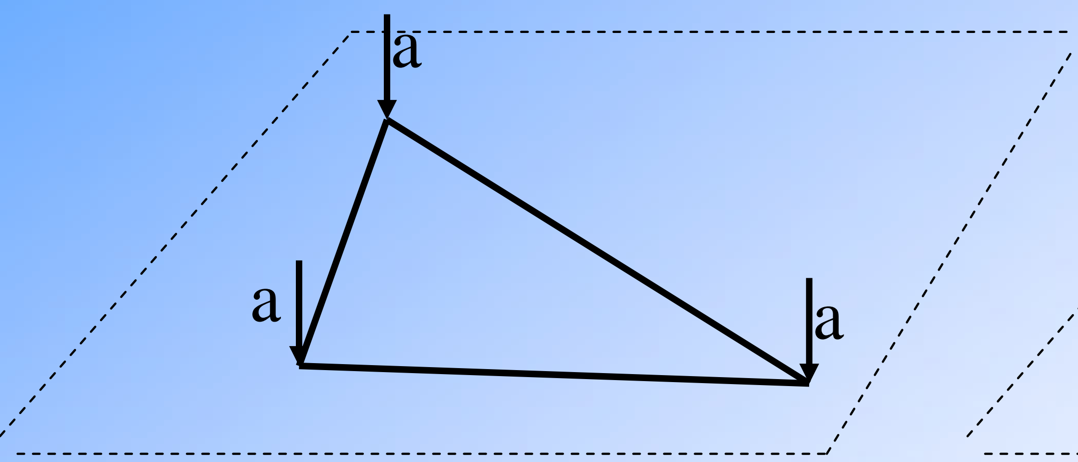
Angoli inscritti in una semicirconferenza sono retti

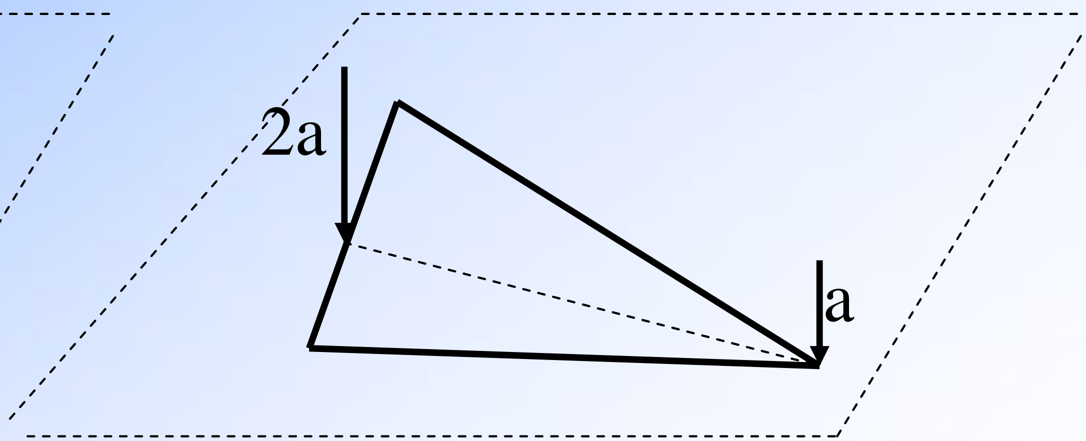
Il baricentro

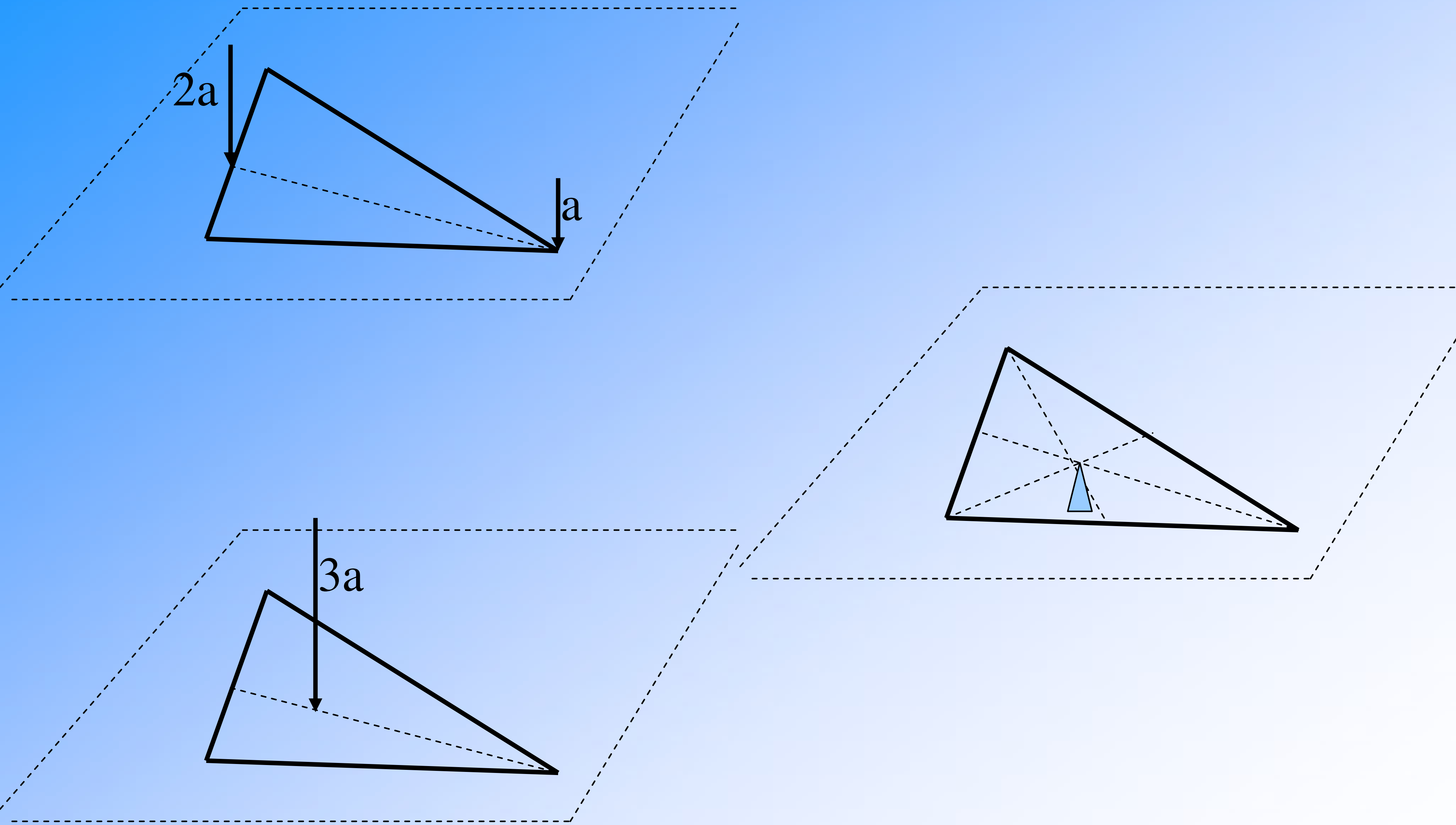


regola del momento:

a.BN = b.AN

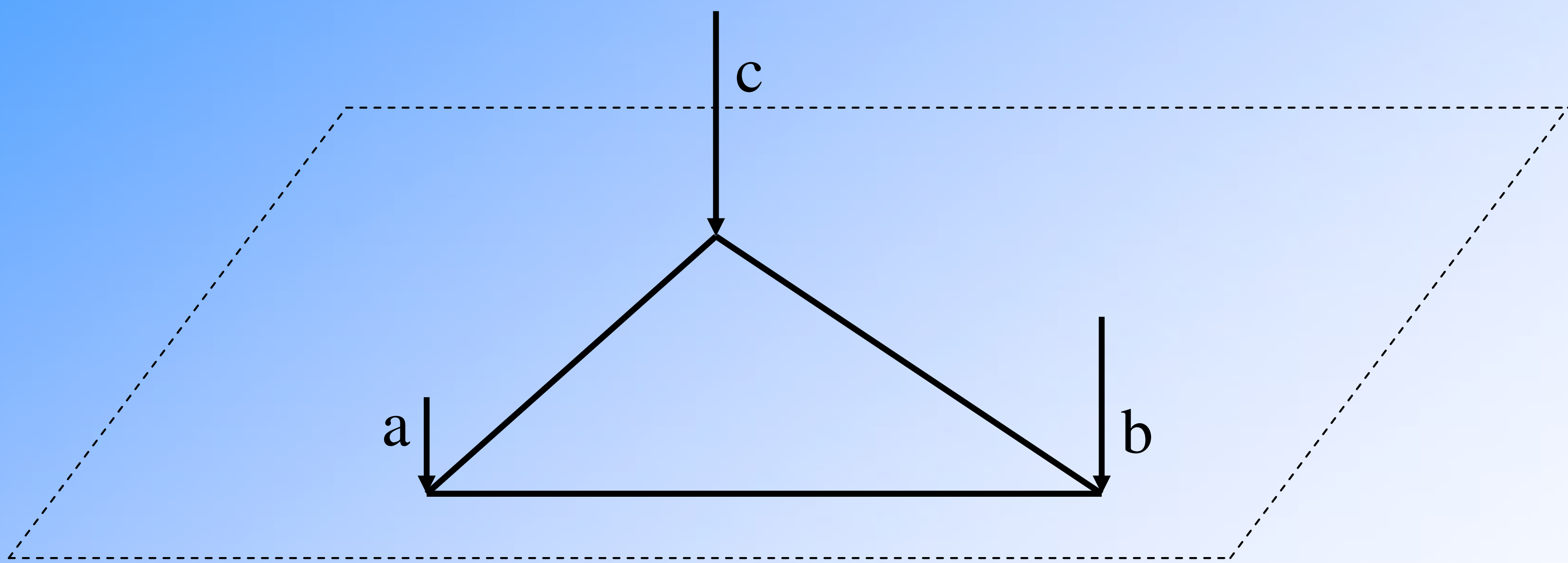


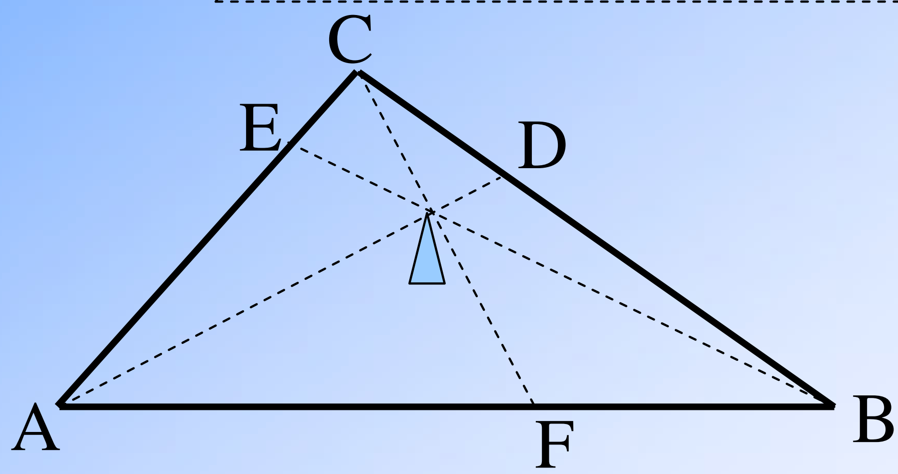



2a
a
3a

Il teorema di Ceva

(Giovanni Ceva, Milano 1647 – Mantova 1734)

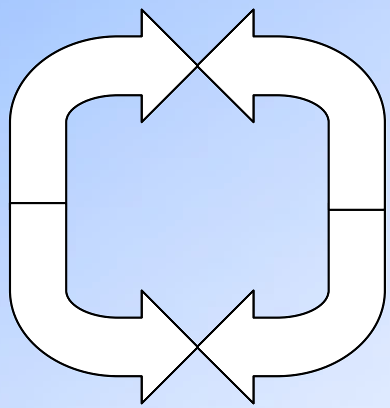


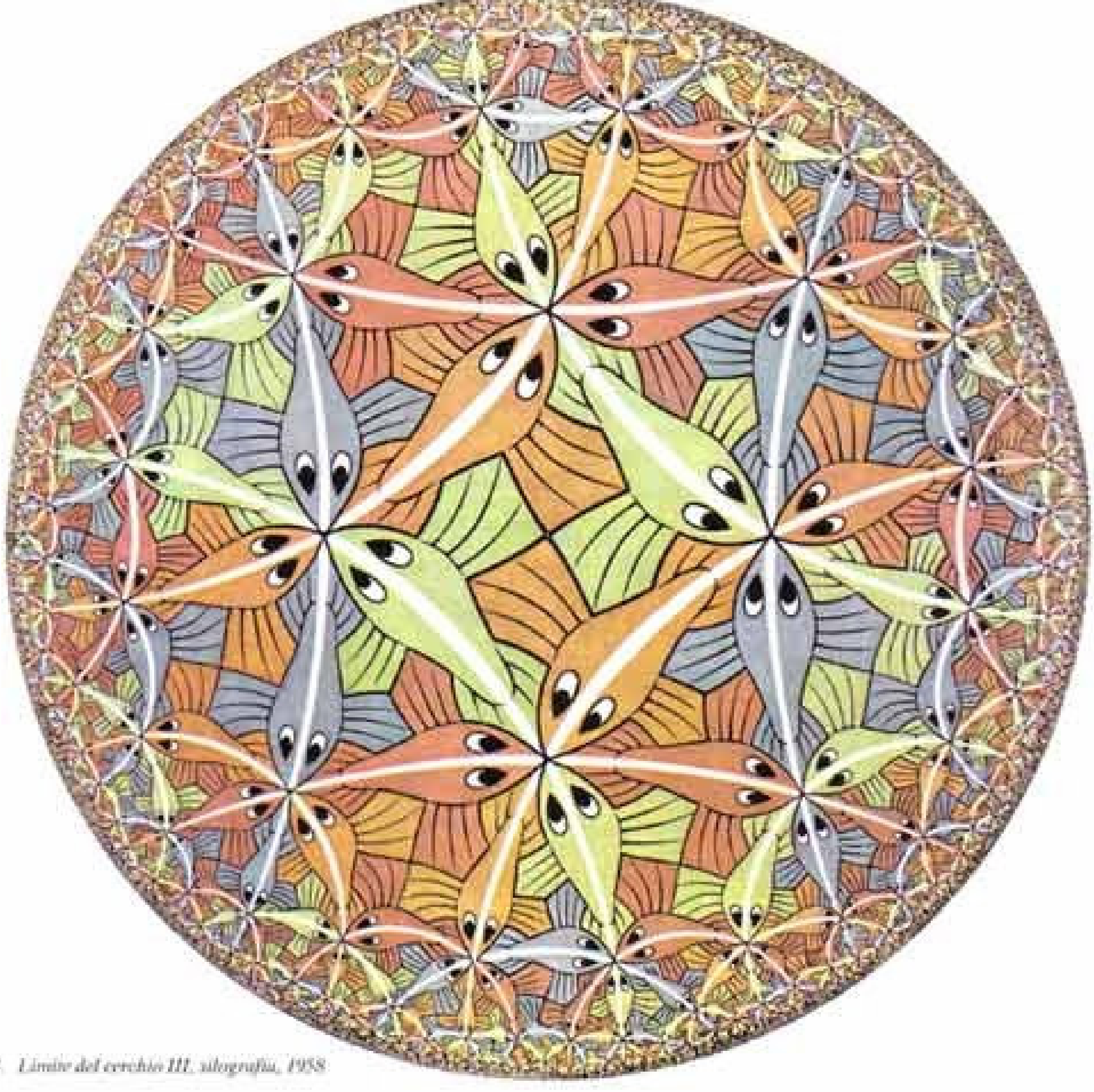


$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Conclusione: il principio del caleidoscopio

Ogni gruppo è un gruppo di simmetria di qualche figura





244. *Limite del cerchio III, silografia, 1958*

Bibliografia

M.A. Armstrong, *Groups and Symmetry*, Springer 1988

G. Caglioti, *Simmetrie infrante, nella scienza e nell'arte*, Clup 1983

M. Dedò, *Forme. Simmetria e topologia*, Zanichelli 1999

S.V. Jablan, *Theory of Symmetry and Ornaments*, Beograd Mat. Institut n. 17, 1995

E.H. Lockwood, R.H. Macmillan, *Geometric Symmetry*, Cambridge Un. Press 1978

G.E. Martin, *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry*, Springer 1982

H. Weil, *La simmetria*, Feltrinelli 1962

La simmetria: una scoperta matematica, Polipress 2007
(a cura di **R. Betti**, **E. Marchetti** e **L. Rossi Costa**)