Matematica e Finanza: prezzi e probabilità

Emilio Barucci
Dipartimento di Matematica
Politecnico di Milano

Outline:

1. Il problema
2. Economia e matematica
3. Finanza
4. Matematica e Finanza: prezzi e probabilità
5. Applicazioni
6. Matematica e Finanza al Politecnico

1.Il Problema

Economia (Finanza): analisi dei fenomeni economici

Interpretazione-comprensione di alcune grandezze della vita economica:
a) andamento dell'economia (crescita, risparmio, debito pubblico)
b) scelte di singoli individui (comprare una casa, acquisto di una assicurazione, scelte di investimento)
c) valutazione di una impresa, di un titolo
d) regolamentazione.

E' necessaria la matematica?

2.Economia e matematica

Economia è una disciplina che ha che vedere con l'agire dell'uomo:

a) storicamente è figlia della filosofia, giurisprudenza, storia, religione

b) forte contaminazione con il mondo politico (azione di governo, ideologie), gli eventi economici sono storicamente determinati e dipendono da molti fattori

c) mancanza di un riscontro sperimentale

$\longrightarrow$

Per lungo tempo (tutto il '700 e parte dell'800):

assenza di rigore scientifico

non autonomia da altre discipline (dibattito sull'utilità)

equivoco: economia scienza descrittiva-storica

Costruzione di un paradigma di riferimento (fine '800-900): Walras, Jevons, Pareto, circolo di Vienna, Von Neumann, Arrow, Debreu

Elementi base:

a) adesione all'individualismo metodologico: l'individuo (l'impresa) è il soggetto elementare su cui fondare l'analisi economica

b) interazione tra gli individui tramite il mercato (ma non solo)

$\longrightarrow$

Come interagiscono i due mondi? (problema complesso)

Perfetta concorrenza: gli individui sono talmente piccoli che non influenzano i prezzi di mercato (price takers)

Approccio assiomatico: Perfetta concorrenza+assiomi sul comportamento degli individui $\rightarrow$ analisi di equilibrio in due passi

Economia senza tempo:

$l = 1, \ldots, L$ **beni**, $i = 1, \ldots, I$ **individui**.

$x \in \Re^L$: paniere di beni.

Individuo i: $e^i, \succeq^i$:

$e^i \in \Re^L_+$: allocazione iniziale di beni

$\succeq^i$: relazione di preferenza definita su $\Re^L_+$:

$x, y \in \Re^L$ $x \succeq^i y \iff$ il paniere di beni x è almeno tanto buono quanto il paniere y per l'individuo i.

Se la relazione di preferenza soddisfa alcune proprietà (assiomi) allora può essere rappresentata (sostituita) tramite una funzione di **utilità** continua

$u^i : \Re^L_+ \longrightarrow \Re$.

Due passi:
a) max utilità dati i prezzi (razionalità sostanziale-coerenza interna)
b) determinare i prezzi che rendono domanda=offerta (compatibilità a livello aggregato-coerenza esterna).

a) Dati i **prezzi** $p \in \Re^L_+$, il valore dell'allocazione inizale di beni è $p^\top e^i$, l'individuo i affronta il problema

$$Max_{x \in \Re^L_+} u^i(x)$$

$$p^\top x \leq p^\top e^i$$

$\rightarrow$ Problema di massimo vincolato (se $u' > 0$ il vincolo è di uguaglianza): $x^{i*}(p)$

funzione eccesso di domanda:

$$z^i(p) = x^{i*}(p) - e^i.$$

b) Equilibrio: $(x^{i*}(p^*),\ i = 1, \ldots, I, p^*)$

p^* tale che

$$\sum_{i=1}^{I} z^i(p) = 0$$

p^* radice di un sistema di equazioni nonlineari.

Interpretazione I: p^* è il vettore dei prezzi tale per cui gli agenti massimizzano la loro funzione obiettivo dati i vincoli (razionalità sostanziale) e le loro decisioni sono tra loro compatibili.
$\rightarrow$ Risposta ad una domanda antica: sotto quali condizioni (assiomi) un comportamento individualista/egoista è compatibile a livello sociale.
$\rightarrow$ centralità della computazione/esistenza dell'equilibrio (th. del punto fisso) Arrow, Debreu.
$\rightarrow$ Pareto ottimalità dell'equilibrio. $\rightarrow$ significato normativo

Interpretazione II: p^*, x^{i*} rappresenta un punto di equilibrio di un sistema dinamico nonlineare (sistema di tâtonnement-legge della domanda e dell'offerta)

$$\dot{p}(t) = Az(p(t))$$

$\rightarrow$ significato descrittivo (evoluzione dei prezzi)
$\rightarrow$ centralità computazione/stabilità dell'equilibrio

Interpretazione III: p^* è caratterizzato rispetto ad alcuni dati primitivi dell'economia (utilità, tecnologia)

Interpretazione I:
successo con la dimostrazione dell'esistenza dell'equilibrio
problema per la non unicità del vettore di equilibrio e la sua computazione.

Interpretazione II:
la stabilità dell'equilibrio è ottenibile sotto condizioni molto forti (non assiomi).

Interpretazione III:
successo.

$\longrightarrow$

Paradigma dell'equilibrio economico generale ha un significato solo nella prima interpretazione e nella terza interpretazione: normativo, coerenza, esistenza, caratterizzazione. Debole in termini descrittivi del mondo.

4.Finanza

La teoria che abbiamo appena descritto è deterministica. L'idea era di scrivere un equivalente del moto dei pianeti (individui-imprese).

La probabilità non è parte della teoria economica fino al secondo dopoguerra. Il destino è simile a quello che avviene in fisica.

Problema: la dinamica dei prezzi dei titoli azionari non sembra essere di tipo deterministico (Bachelier ai primi del '900) $\rightarrow$ contrario a ciò che al teoria economica vorrebbe fare (spiegare rispetto ad alcune grandezze)

4.Matematica e Finanza: prezzi e probabilità

Economia in due istanti di tempo ($t = 0, 1$) ed un solo bene (denaro)

L'aspetto aleatorio è descritto da S possibili **stati del mondo** in $t = 1 : \omega_s,\ s = 1 \dots S$ (ognuno ha una probabilità strettamente positiva di avverarsi).

In $t = 0$ sono attivi N mercati dove si scambiano N **titoli**.

Il titolo n è scambiato al tempo $t = 0$ al **prezzo** q_n e consegna un **dividendo** d_{ns} nello stato del mondo ω_s in $t = 1$ ($d \in \Re^S$). Rappresentazione vettoriale:
$q \in \Re^N,\ D \in \Re^{SN}$

$w \in \Re^N$ identifica un **portafoglio**: $w_n > 0$ il titolo n è detenuto, $w_n < 0$ il titolo n è venduto allo scoperto.

Valore di mercato in $t = 0$ del portafoglio w è pari a $q^\top w$, il suo payoff in $t = 1$ è dato da Dw.

Opportunità di arbitraggio: data la coppia prezzi-dividendi (q, D), un portafoglio $w \in \Re^N$ costituisce una opportunità di arbitraggio se una delle seguenti situazioni è verificata:

- *arbitraggio del I tipo*: $q^\top w \leq 0, \quad Dw > 0;$
- *arbitraggio del II tipo*: $q^\top w < 0, \quad Dw \geq 0.$

Un arbitraggio è un portafoglio che genera ricchezza senza rischio.
Arbitraggio I tipo: a partire da un ammontare di denaro non positivo (anche nullo), il soggetto si assicura un payoff descritto da un vettore positivo non nullo di dimensione S.
Arbitraggio II tipo: a partire da un ammontare di denaro negativo, il soggetto si assicura un vettore di payoff non negativo, eventualmente nullo.

Ipotesi base in finanza parallela a quella di equilibrio: (q, D) non permettono opportunità di arbitraggio.

Quali implicazioni?
I prezzi nascondo delle probabilità.

Proposizione: (q, D) non permettono opportunità di arbitraggio $\iff$ il sistema

$$q = D^\top m$$

ammette una soluzione m strettamente positiva.

Dimostrazione. $\leftarrow$
Ipotizziamo che esista uun vettore $m \in \Re^S_{++}$ tale che $q^\top = m^\top D$.
Dato un portafoglio $w \in \Re^N$: $q^\top w = m^\top D w$ e quindi $[1, m^\top]\overline{D}w = 0$
dove $\overline{D}$ è una matrice di dimensione $(S+1) \times N$ costituita per la prima riga dal vettore $-q$ e per le altre righe dalla matrice D.
Essendo $m >> 0$ la condizione è incompatibile con l'esistenza di una opportunità di arbitraggio $(w \in \Re^N : \ \overline{D}w > 0)$.

La soluzione è unica se $Rango(D) = S$.

Interpretazione I.

Cosa rappresenta m_s?

m_s: prezzo del portafoglio w^s che permette di ottenere il vettore $1_s = [0, \ldots, 1, \ldots, 0]^\top$.

Sia $1_s = Dw^s$.

$$q^\top w^s = m^\top D w^s = m^\top 1_s = m_s$$

m_s è detto prezzo dello stato del mondo ω_s.

Il prezzo di un titolo può essere visto come prodotto del dividendo per il vettore m:

$$q_n = \sum_{s=1}^{S} m_s d_{ns} = d^\top m.$$

Interpretazione II.

Sia il primo titolo privo di rischio:

$q_1 = 1,\ d_{1s} = r,\ s = 1, \ldots, S$:

$$1 = \sum_{s=1}^{S} r m_s :$$

$$\frac{1}{r} = \sum_{s=1}^{S} m_s.$$

Definiamo $\pi_s^* = \frac{m_s}{\sum_{s=1}^{S} m_s}$ (misura di probabilità neutrale al rischio):

$$q_n = \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{S} \pi_s^* d_{ns} = \frac{1}{r} E^*[\tilde{d}_n].$$

Il prezzo del titolo può essere visto come valore atteso scontato rispetto ad una misura di probabilità neutrale al rischio.

5.Applicazioni

Sia dato un titolo derivato il cui payoff in $t = 1$ è $x \in \Re^S$. Quale è il prezzo giusto del titolo?

Il prezzo che non genera opportunità di arbitraggio:

$$q(x) = \sum_{s=1}^{S} m_s x_s =$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{S} \pi_s^* x_s = \frac{1}{r} E^*[\tilde{x}].$$

In assenza di opportunità di arbitraggio (q, D) nasconde dei prezzi e delle probabilità che permettono di prezzare altri titoli senza generare opportunità di arbitraggio.

La finanza matematica è questo: assumendo che i prezzi/dividendi dei titoli seguano processi stocastici: trovare m, definire il prezzo di un payoff, determinare il portafoglio di copertura.

6.Matematica e Finanza al Politecnico

Indirizzo di finanza quantitativa all'interno della laurea specialistica in Ingegneria Matematica.

Progetto incardinato su figure professionali: asset management, gestione del rischio, ingegneria finanziaria, trading, pricing prodotti strutturati.

Esami di matematica (analisi, probabilità, processi stocastici), statistica, finanza:
Finanza matematica I
Finanza matematica II
Ingegneria finanziaria.

Gli studenti sviluppano tesi/stages con primarie istituzioni finanziarie italiane e internazionali.