Scuola estiva di Matematica Applicata

13-18 Giugno, 2016, Milano

POLITECNICO DI MILANO



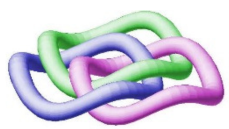


DALLA GEOMETRIA SINTETICA ALLA GEOMETRIA PARAMETRICA

Un breve percorso storico

Franca Caliò, Elena Marchetti

Dipartimento di Matematica – Politecnico di Milano



Geometria (1)

La **geometria** (secondo Erodoto e Aristotele) nasce in **Egitto**.

Si attribuiscono agli Egizi: aree di figure piane, una prima regola per l'area del cerchio, primi rudimenti di trigonometria.

La **geometria egizia** è comunque un **insieme**, per quanto ingegnoso, **di calcoli**; è costituita di conoscenze destinate alla risoluzione di problemi pratici: **è tecnica**.

La **geometria, come tecnica**, si sviluppa in modo più raffinato presso **i Babilonesi** e si attribuisce loro, per esempio, la scoperta del triangolo inscritto in una semicirconferenza: il triangolo rettangolo (5:12:13).

Sulla cultura egiziana si forma **Talete di Mileto**.

Talete (VII, VI secolo a. C.): misura piramidi con semplici proporzioni e la distanza delle navi in alto mare introducendo la similitudine

Geometria (2)

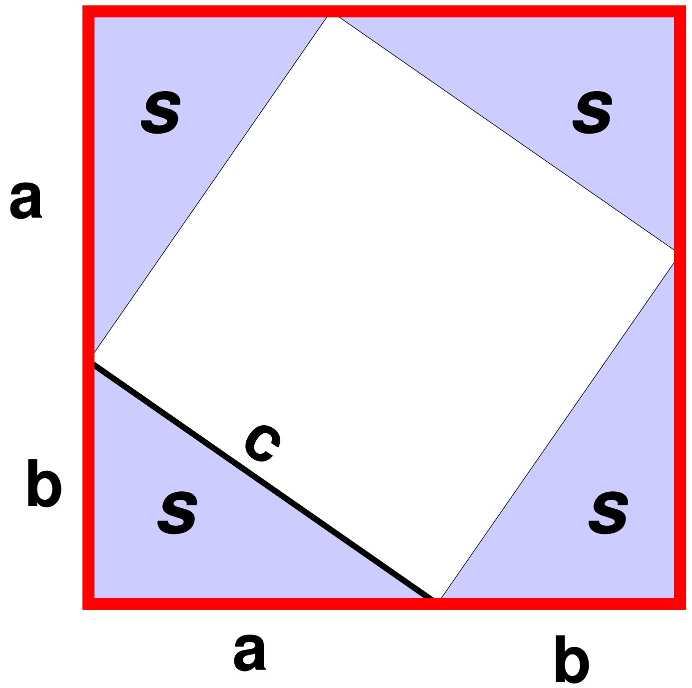
La **geometria**, come **scienza** (organizzazione con regole della conoscenza con la possibilità di dedurre dal generale il particolare e di dimostrare), nasce presso i **Greci.**

Pitagora (570, 500 a. C., allievo di Talete): dimostrazione costruttiva del teorema sul triangolo rettangolo.

Il teorema di Pitagora, benchè permetta una misurazione effettiva, **è assolutamente indipendente da qualsiasi lunghezza.**

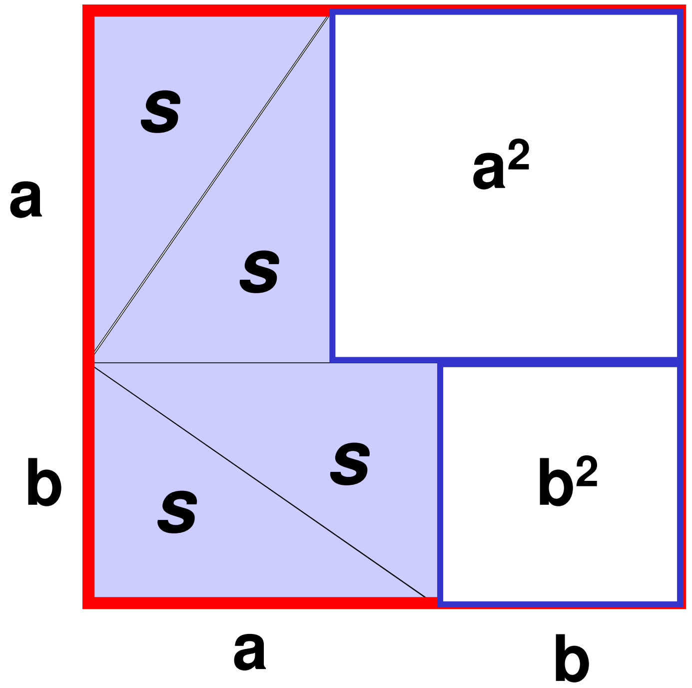
È di Keplero la famosa frase:
"La geometria ha un grande tesoro: il teorema di Pitagora"

Teorema di Pitagora

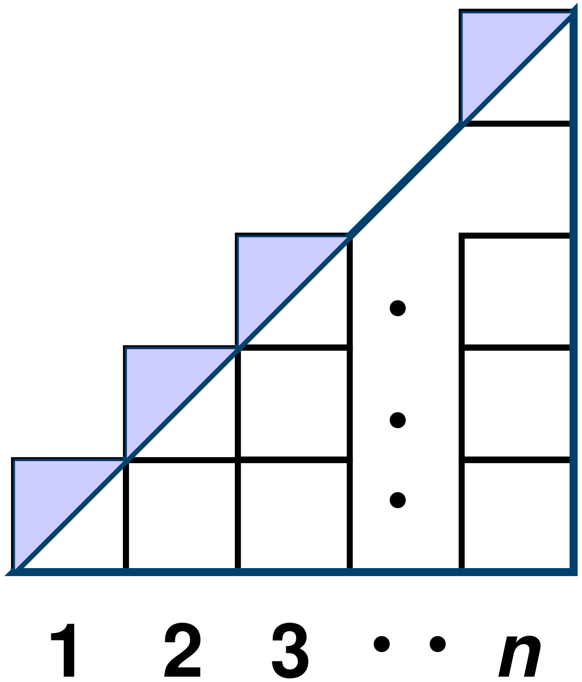


$$\color{red}{S} = 4s + c^2$$

$$\color{red}{S} = 4s + a^2 + b^2$$



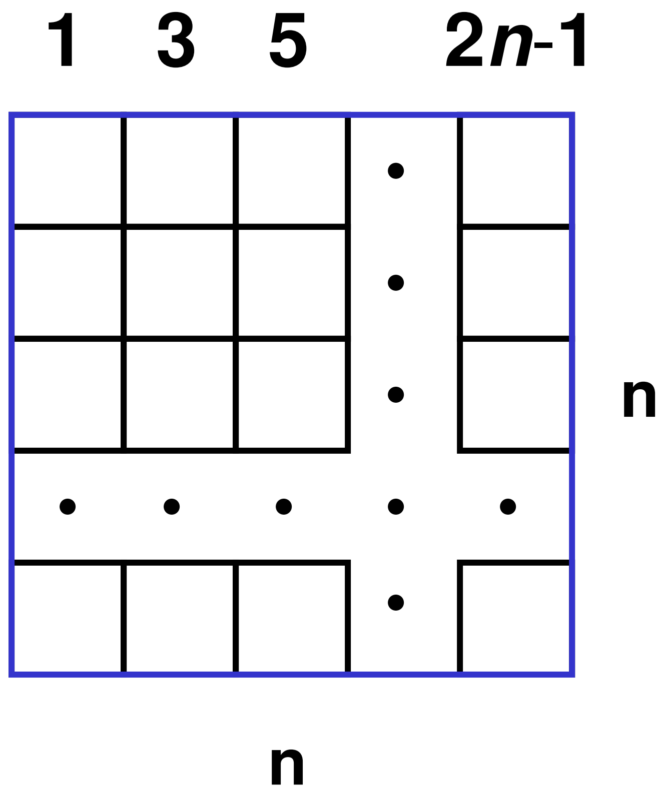
Numeri figurati



$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Somma dei primi n interi

Numeri figurati



$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n\text{-}1 = n^2$$

Somma dei primi n dispari

Geometria (3)

La **geometria**, **come costruzione organica**, è attribuita ad **Euclide** (300 a. C.).

Euclide, influenzato dalla logica di Aristotele, propone la costruzione di una vera scienza: tutto deve elevarsi passo passo partendo dalle pietre basilari e una verità deve necessariamente derivare da un'altra

La **geometria euclidea ha carattere sistematico- deduttivo**: la teoria poggia su principi non dimostrati e procede con proposizioni dimostrate su quei principi (**enti geometrici, postulati, regole di deduzione logica**)

Geometria (4)

La geometria chiude la sua **epoca d'oro** con **Apollonio, Archimede, Diofanto…**

Le **geometrie non euclidee** (XIX secolo) nascono dapprima con il tentativo di dimostrare il V postulato di Euclide (postulato delle parallele) e, quindi, come negazione del V postulato di Euclide.

(se una retta che interseca due altre rette forma dalla stessa parte angoli inferiori a due angoli retti, le due rette , se estese indefinitamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due retti)

Lo schema logico di Euclide, che è presente anche nelle geometrie non euclidee, si può chiamare in termini moderni un sistema **ipotetico – deduttivo** (postulati compatibili, completi, indipendenti))

Geometria (4) bis

1.tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una e una sola retta;

2.si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente;

3.dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio;

4.tutti gli angoli retti sono congruenti fra loro;

5.se una retta che taglia due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.

Geometria (5)

Una breve parentesi su un’altra branca della matematica: l’**algebra.**

L’algebra è la scienza organizzata dei numeri e delle operazioni su di essi.

L’**algebra** a cui si attribuiscono origini lontane sia temporali che geografiche (Egizi, Babilonesi, Diofanto e l’arabo Alkhuwarismi 825 d. C.) nasce come una raccolta di tecniche per risolvere particolari equazioni.

Essa passa attraverso le elaborazioni di **Fibonacci** e **Pacioli** (XIII secolo) e si sviluppa, organizzandosi (nel XV e XVI secolo) con i contributi di **Bombelli, Tartaglia, Cardano**…

Interessante è la dimostrazione di **Abel** e **Galois** sull’impossibilità di risolvere con formula chiusa le equazioni di quinto grado.

Geometria (6)

Un importante sviluppo dell'algebra nel XVII secolo è dato da **Cartesio** che introdusse, nel suo libro **Géometrie**, i simboli per indicare le incognite e le operazioni su di essi.

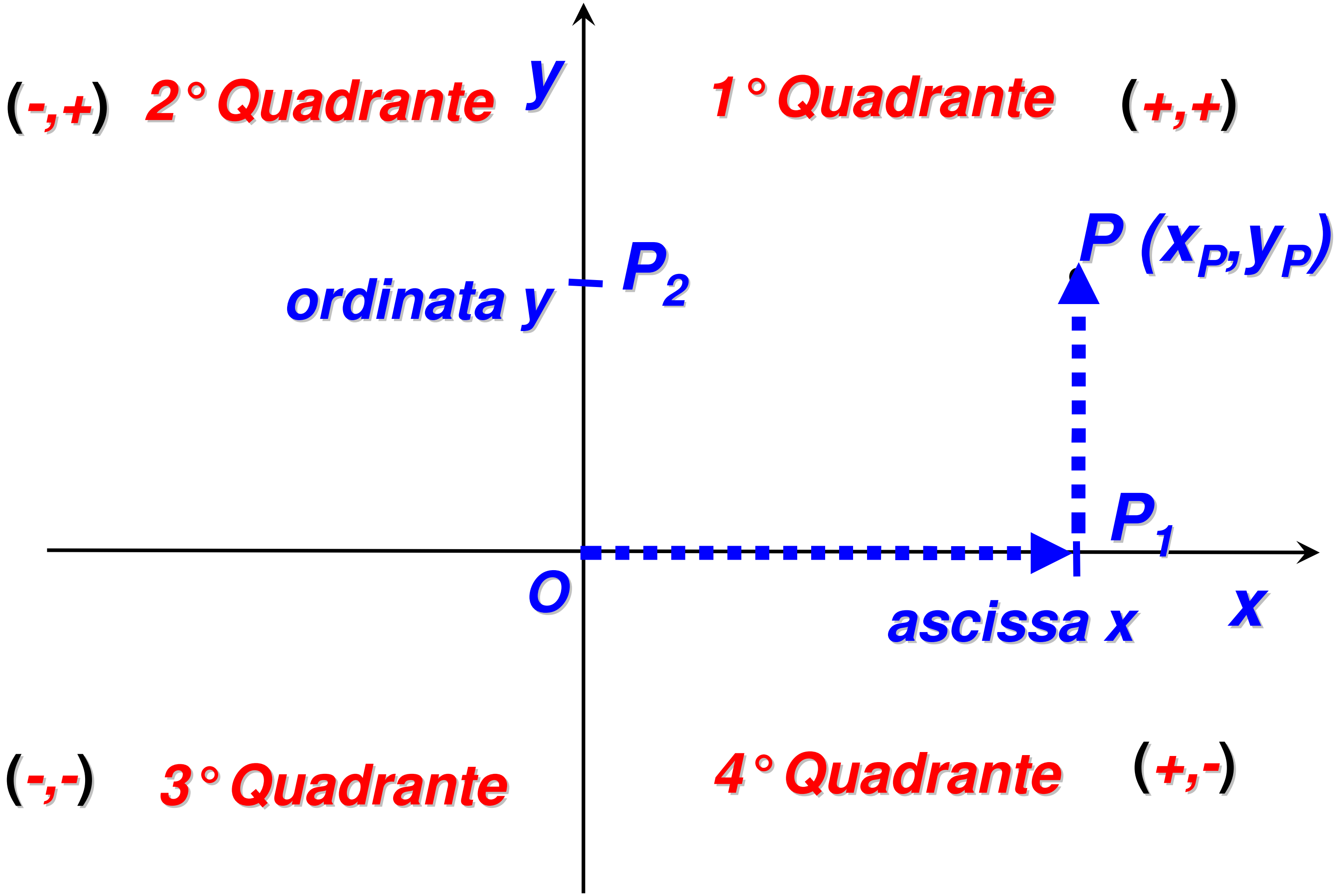
Il suo contributo più significativo è l'introduzione della **geometria analitica**, con il contemporaneo contributo di **Fermat.**

La **geometria analitica** applica gli strumenti dell'algebra alle tecniche dimostrative sintetiche geometriche degli antichi.

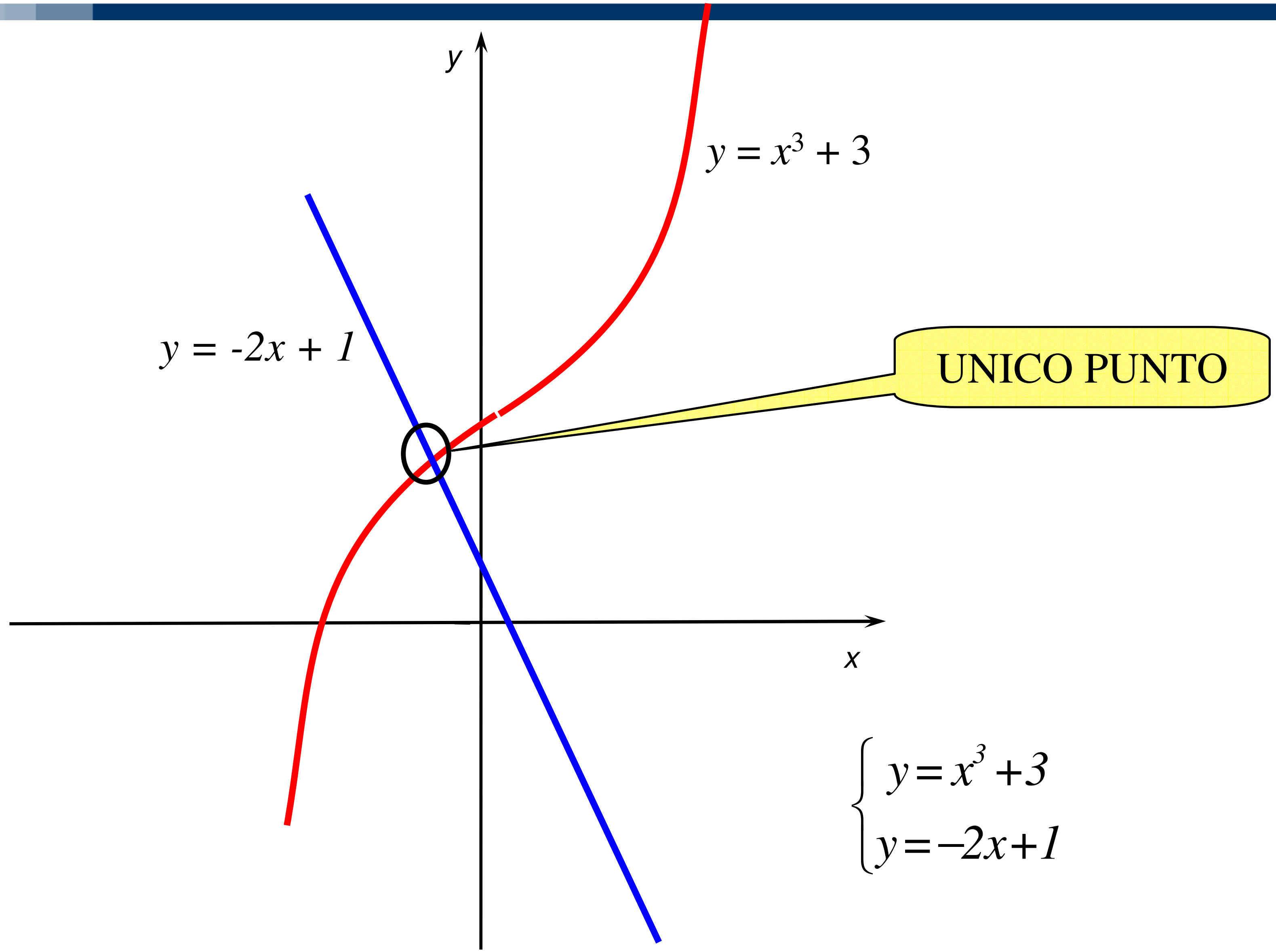
Per risolvere un problema geometrico con il metodo analitico:

si traduce il problema geometrico in un problema algebrico, associando a ogni ente della geometria il corrispondente ente dell'algebra e interpretando i risultati algebrici in termini geometrici.

Nel piano: assi e coordinate cartesiane

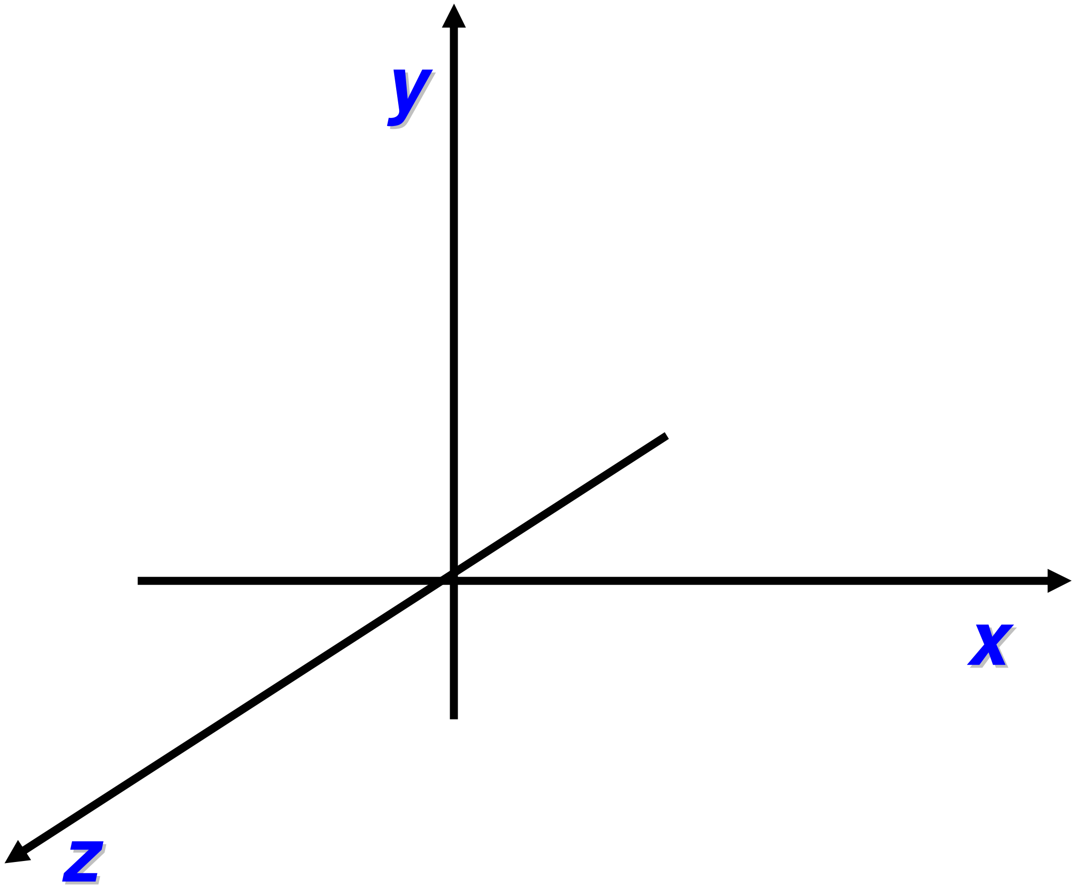


Esempio di problema di geometria analitica 2 D

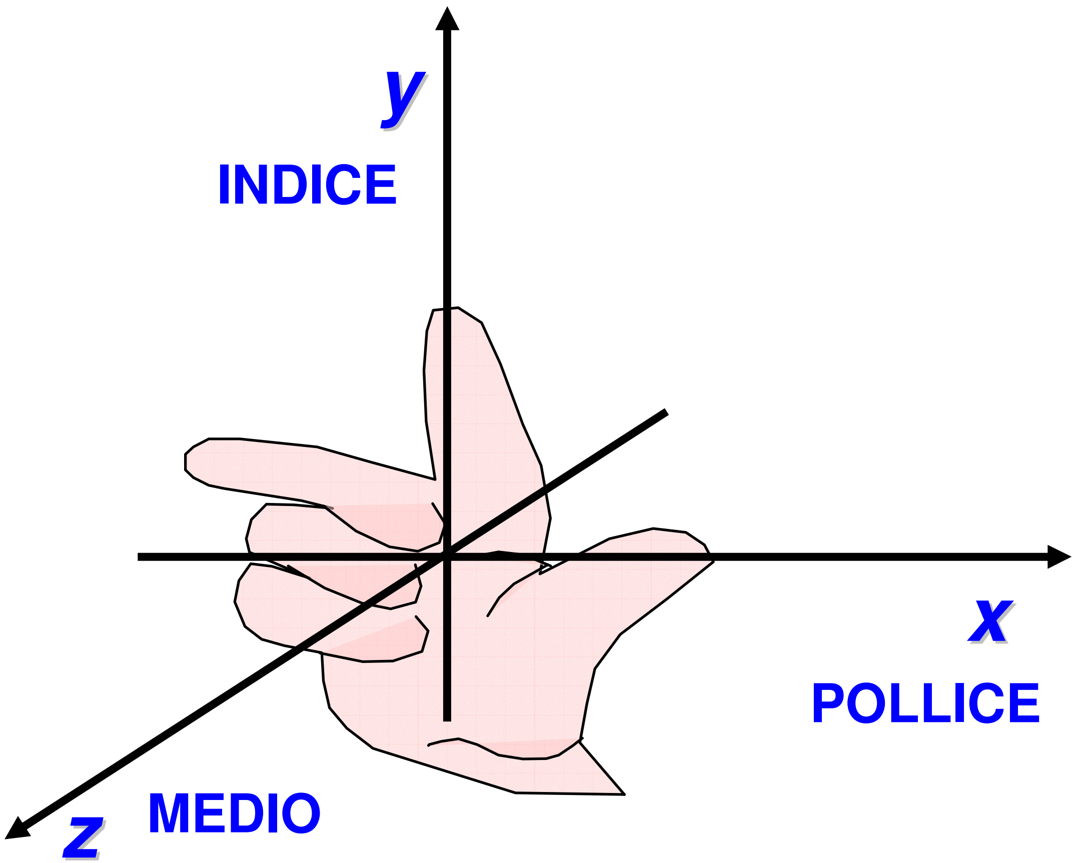


$$\begin{cases} y = x^3 + 3 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

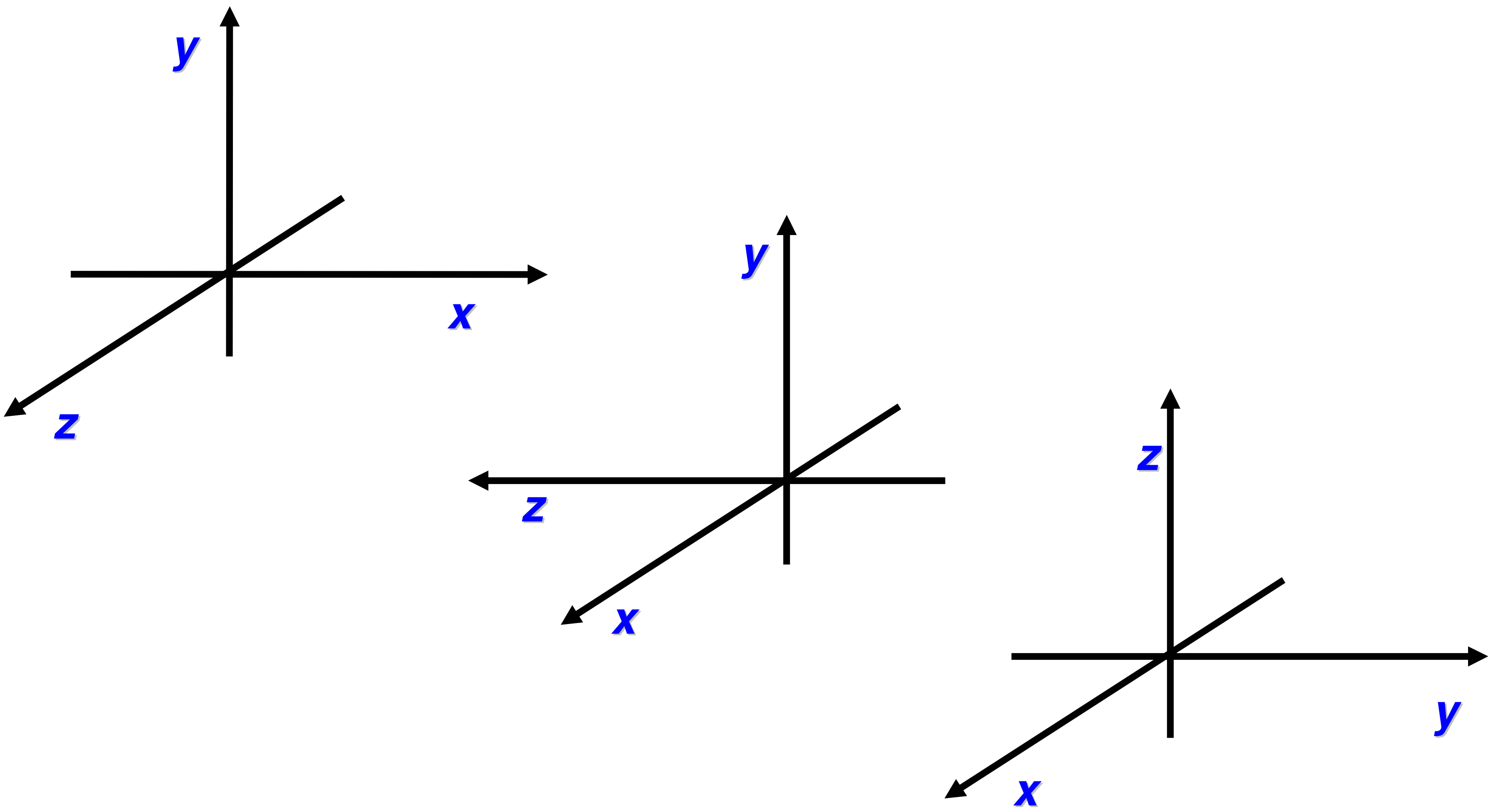
Nello spazio: tre assi cartesiani



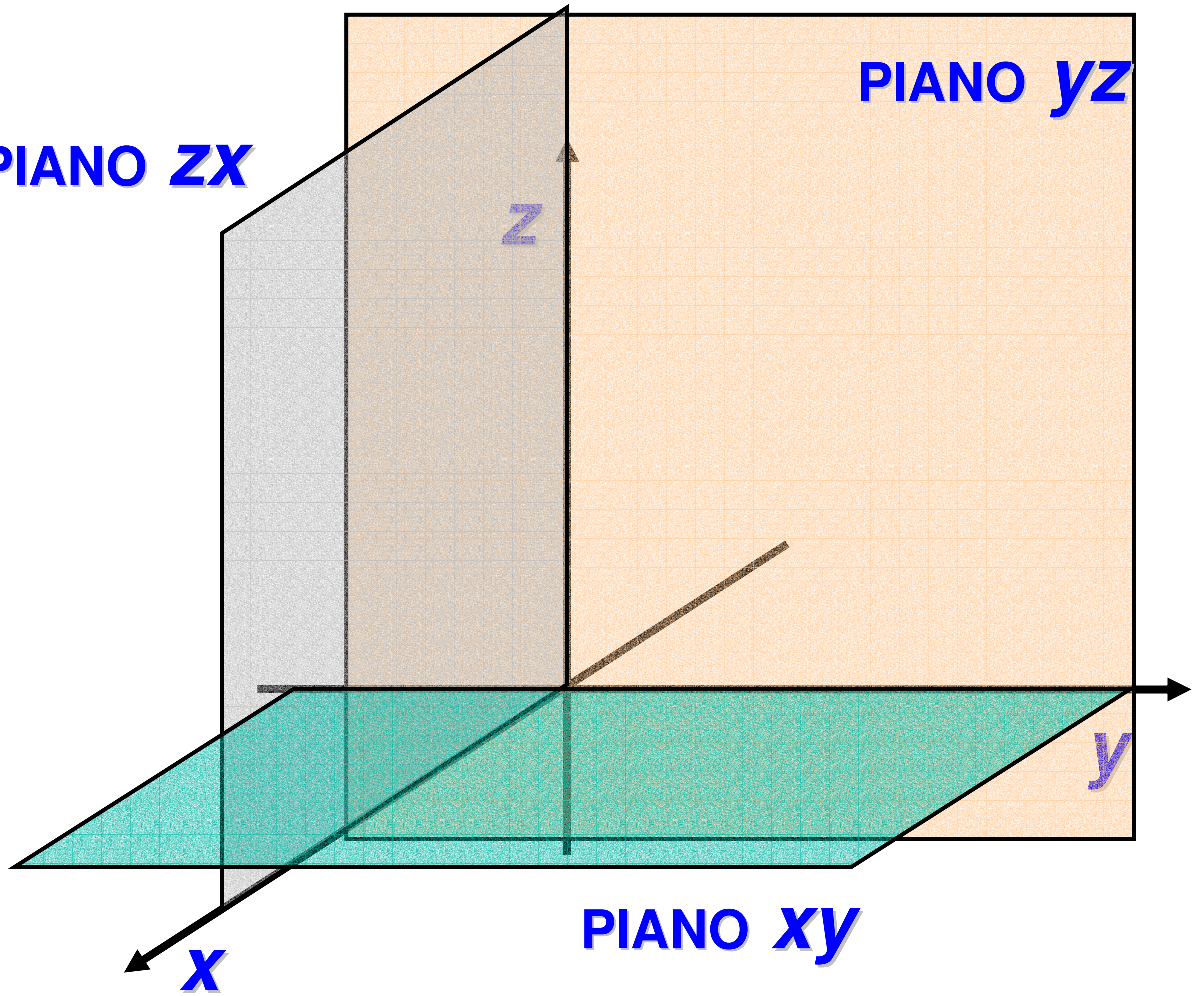
Nello spazio: tre assi cartesiani
REGOLA DELLA MANO DESTRA



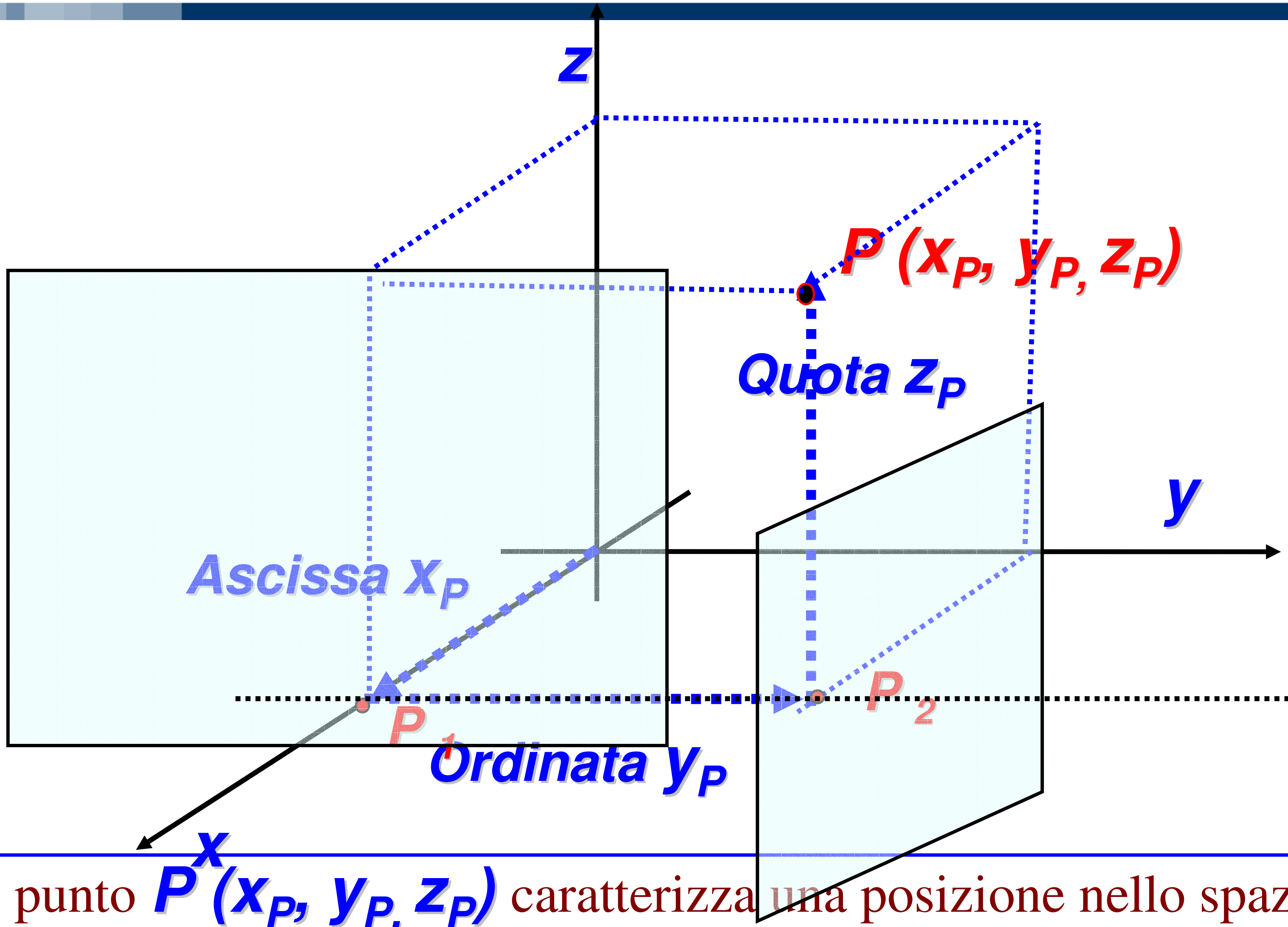
Posizionamenti di una terna destra



Piani coordinati e ottanti

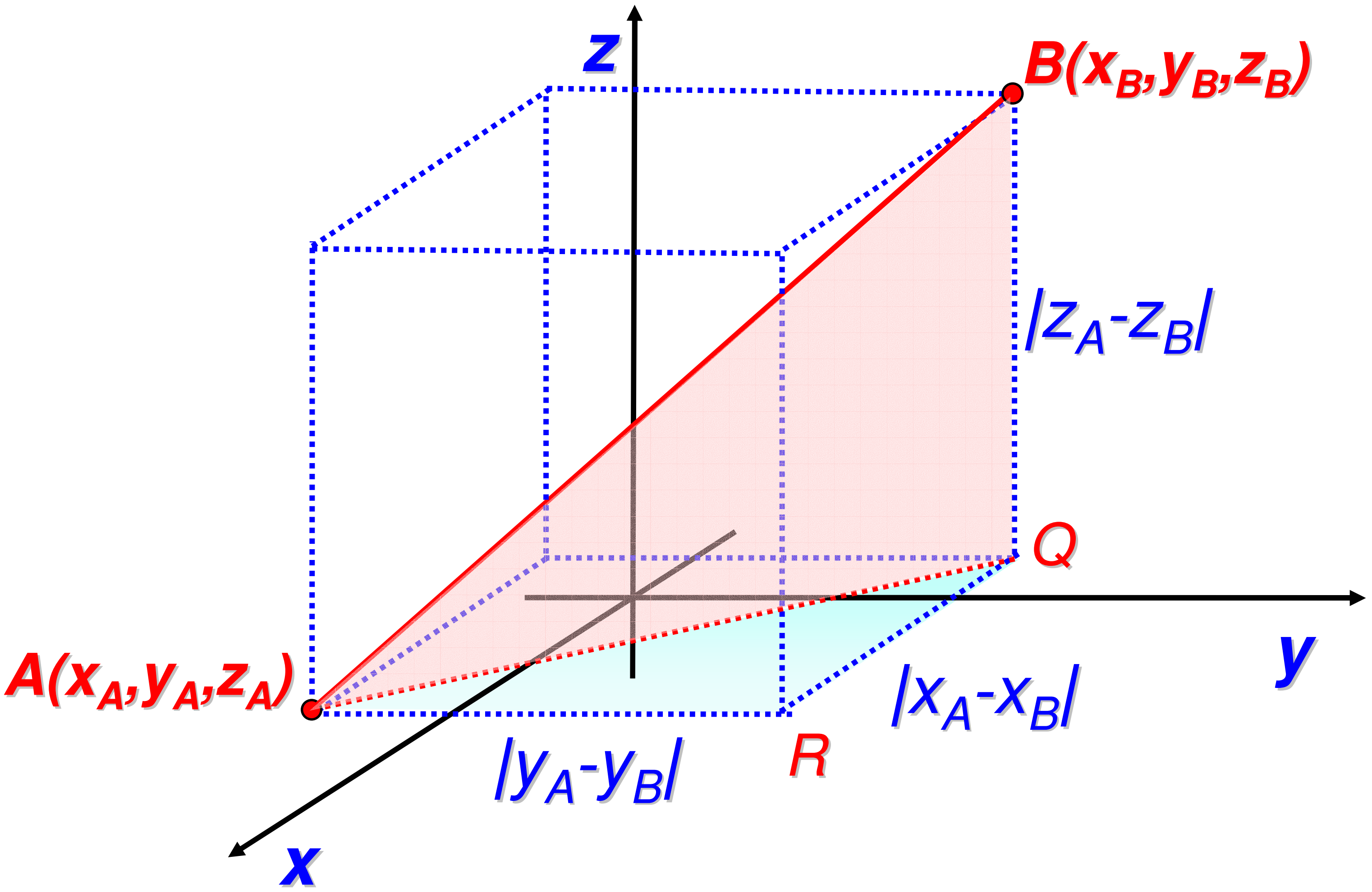


Punto: coordinate cartesiane nello spazio



Il punto $P\ (x_P, y_P, z_P)$ caratterizza una posizione nello spazio dotato di assi cartesiani ortogonali

Distanza di due punti



$$\overline{AB}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{QB}^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2$$

$\boxed{x+2y+z=0}$ piano per O

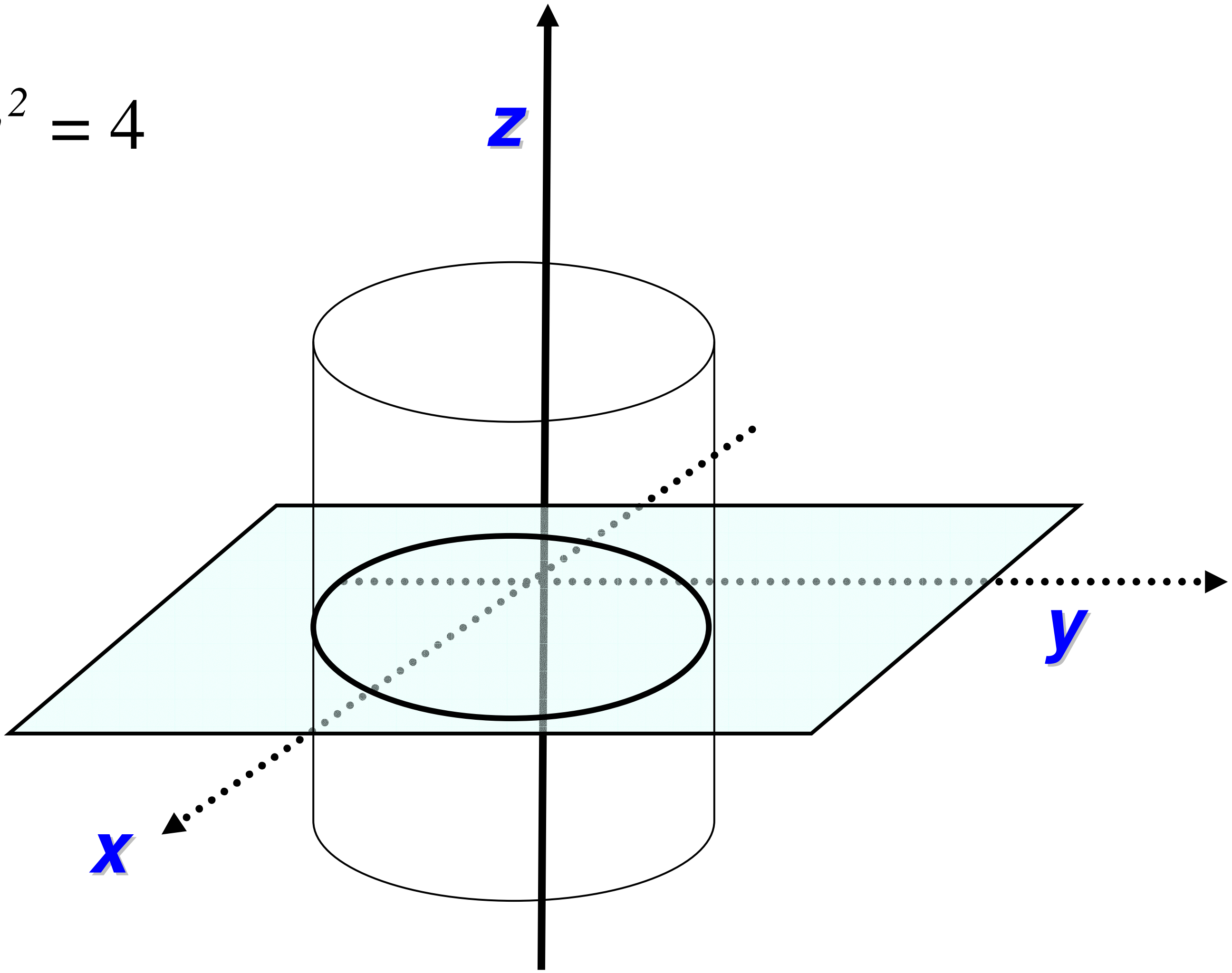
$\boxed{x=1}$ piano parallelo al piano *yz*

$\boxed{x^2+y^2+z^2=4}$ superficie sferica di centro O e raggio 2

$\boxed{x^2+y^2=4}$ superficie cilindrica di asse z e raggio 2

Esempio di problema di geometria analitica 3 D

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$



Potenzialità di un calcolatore (1)

Calcolo veloce anche se elementare (supporto ad ogni attività di interpretazione e simulazione di fenomeni)

Potenzialità di memorizzazione (supporto all'archivio ed elaborazione di molti dati)

Capacità di recezione e restituzione dei dati grafici sempre più sofisticata e supportata da potenti interfacce (supporto ad ogni tipo di attività di progetto)

Potenzialità di un calcolatore (2)

La nascita di un computer e la crescita della sua complessità e potenzialità ha il suo percorso storico e le sue stars.

Per citarne solo alcune:

Pascal, Babbage, Turing, von Neumann (progenitori e genitori del calcolatore programmabile e suo software) **Jobs** (socio creatore del personal computer) e **i team** dell'**UNIVAC,** dell'**IBM,** dell'**OLIVETTI,** dell'**APPLE.**

L'evoluzione della tecnologia (da strumenti meccanici a relé elettrici, a microprocessori elettronici…) assieme ad intuizioni matematico/filosofiche prodigiose hanno portato ad una straordinaria potenzialità e diffusione dei computer, che pur rimane uno strumento incapace di sostituire l'uomo: **non sceglie, non ragiona e non decide.**

Geometria analitica vettoriale

La più moderna di tutte le applicazioni, che ha recentemente portato ad ulteriori evoluzioni dei computer e degli strumenti ad essi connessi è la **computer graphics** (ricordiamo, a titolo di esempio, le stampanti 3D di ultima generazione).

Anche in questo caso il computer deve seguire istruzioni semplici e ben precise.

Il linguaggio matematico che ci ha permesso di interloquire con un calcolatore, per affrontare problemi di grafica e che si è sviluppato nel XX secolo, è il linguaggio del **calcolo vettoriale e matriciale** che ha permesso di esprimere, ancora in termini algebrici, in modo più duttile e agile la geometria analitica, che diviene **geometria analitica vettoriale o parametrica.**