Attività tratta dal Quaderno Interattivo di Geometria

Autori: M.A. Mariotti, D. Paola, O. Robutti, D. Venturi

Università di Pisa

L'isola del tesoro

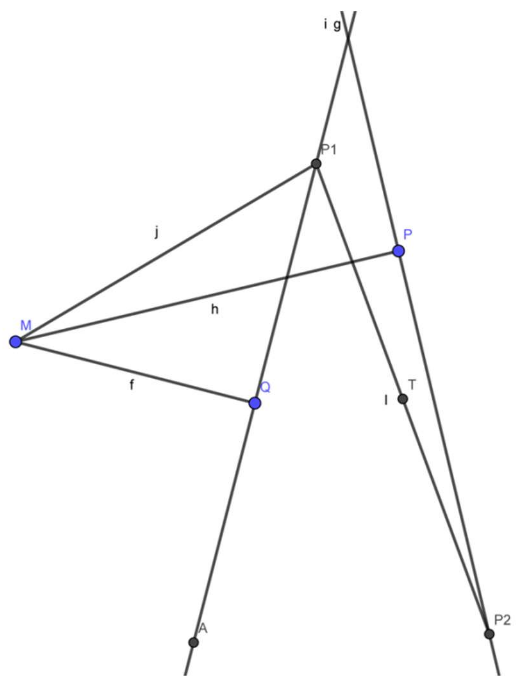
Lavoro di gruppo in laboratorio

Situazione

Ariele ha trovato la mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni: vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola troverai un melo M un pino P e una quercia Q. Da M dirigiti in linea retta fino a giungere in Q. Qui gira verso la tua sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MQ. Pianta in questa posizione un paletto P1. Quindi ritorna in M e da qui dirigiti verso P in linea retta. Giunto in P gira a destra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MP. Pianta, in questa posizione un paletto P2. Il tesoro T si trova nel punto medio del segmento P1P2. Ariele giunto sull'isola del tesoro ha la brutta sorpresa di non trovare più il melo M. Ci sono P e Q ma non c'è M.

Proposta di lavoro

- **Ariele potrà trovare ugualmente il tesoro?**
- **Se la risposta è affermativa, qual è la procedura per trovare il tesoro?**
- **Dimostra la validità di tale procedura.**



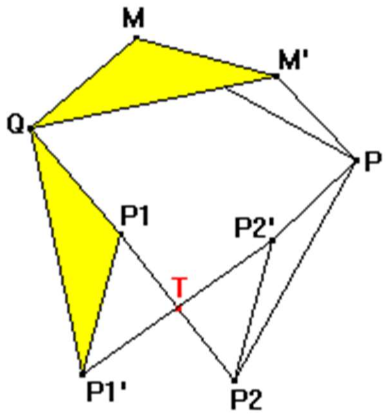
Dimostrazioni Isola del Tesoro

Dimostrazione

Si vuole dimostrare che il punto T è indipendente dalla posizione di M.

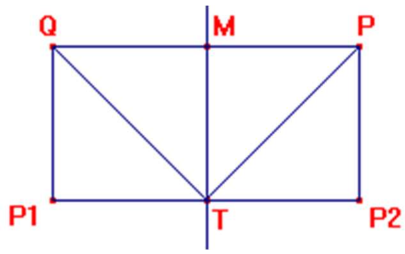
Seguono due dimostrazioni, la prima (dall'articolo di Domingo Paola: "L'uso delle tecnologie nella costruzione del significato in matematica. Analisi di alcune attività didattiche.") è stata fornita da un gruppo di studenti di una quarta liceo scientifico che erano stati abituati già nel precedente anno scolastico ad affrontare e risolvere, in piccoli gruppi, problemi aperti con l'aiuto di Cabri.
I ragazzi hanno dimostrato che il tesoro si può trovare scegliendo un punto qualunque, chiamandolo M e seguendo le indicazioni suggerite dalla mappa.La seconda dimostrazione vuole validare la congettura secondo la quale T si può trovare costruendo il quadrato di lato QP e prendendo il punto d'incontro delle sue diagonali.
In questo caso si parte da un caso particolare per arrivare al caso generale.

Prima dimostrazione: (dall'articolo di Domingo Paola: "L'uso delle tecnologie nella costruzione del significato in matematica. Analisi di alcune attività didattiche.")"Per dimostrare che, dovunque si trovi M, T rimane nella stessa posizione, è possibile prendereun punto M' a caso e dimostrare che il punto medio del segmento P1'P2' è lo stesso punto medio del segmento P1P2.
In riferimento alla figura di seguito riportata, i ragazzi si sono proposti di dimostrare che i triangoli P1'P1T e P2'P2T sono congruenti. Sempre facendo riferimento alla figura consideriamo i triangoli MM'Q e QP1P1'. Essi hanno : M'Q=QP1' per ipotesi; MQ=QP1 per ipotesi; inoltre gli angoli MQM' e P1'QP1 sono congruenti perché complementari di uno stesso angolo. In base al primo criterio di congruenza dei triangoli, possiamo concludere che i due triangoli considerati sono congruenti. In particolare abbiamo P1P1'=MM'.



Con analoghe considerazioni è possibile dimostrare che i due triangoli MM’P e P2P2’P sono congruenti. In particolare abbiamo che MM’=P2P2’. Per la proprietà transitiva della congruenza possiamo affermare che P1P1’=P2P2’. Inoltre gli angoli P1TP1’ e P2TP2’sono congruenti perché opposti al vertice. Osserviamo ancora che P1 e P1’ sono i corrispondenti di M e M’ in una rotazione di 90°. Quindi P1P1’ è perpendicolare a MM’. Analogamente si può dire che MM’ è perpendicolare a P2P2’. Le rette su cui giacciono i segmenti P1P1’ e P2P2’ sono quindi parallele; ciò consente di affermare che gli angoli TP2’P2 e TP1’P1 sono congruenti, così come gli angoli TP1P1’ e TP2P2’. Quindi, per il secondo criterio di congruenza i triangoli P1’P1T e P2’P2T sono congruenti. In particolare P1’T=P2’T e P1T=P2T; poiché ciò vale qualunque sia il punto M’, possiamo concludere che la posizione di T è indipendente dalla scelta del punto M.

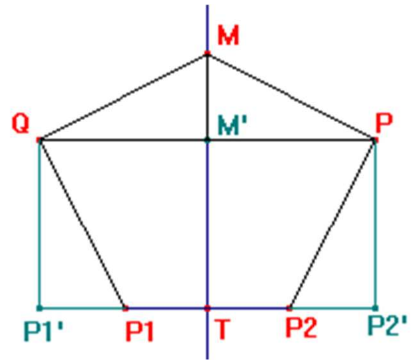
Seconda dimostrazione:
<u>Situazione particolare n° 1:</u> **M coincide col punto medio di QP.**



In questo caso, essendo M il punto medio di QP, si ha QM = MP ed essendo QP1 e PP2 ottenuti mediante una rotazione rispettivamente di QM e di MP, QP1= QM e PP2= PM, perciò si ha: QM = MP = QP1 = PP2. Poiché QP1 e PP2 sono entrambi perpendicolari a PQ, QP1 // PP2, perciò il quadrilatero QPP1P2 è ovviamente un rettangolo con la base doppia rispetto all’altezza. Essendo inoltre T punto medio del segmento P1P2, QPT è un triangolo isoscele con base QP e altezza TM, con gli angoli alla base di 45°, perciò l’angolo QTP è retto.
T si può allora trovare costruendo il quadrato di lato QP e

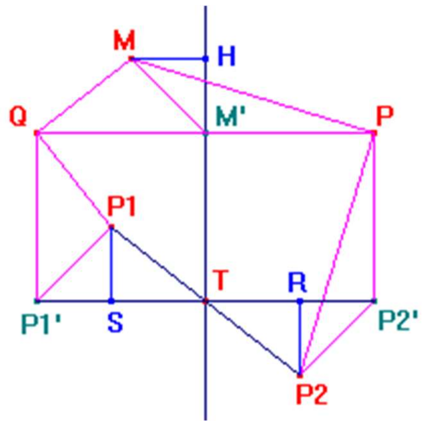
prendendo il punto d'incontro delle diagonali.

<u>Situazione particolare n° 2:</u> **M appartiene all'asse di QP.**



Sia M' il punto medio di QP.QM'M è congruente a QP1'P1 ed a PP2'P2 poiché QP1'P1 si ottiene mediante una rotazione di -90° di centro Q del triangolo QM'M, mentre PP2'P2 si ottiene mediante una rotazione di 90° di centro P del triangolo PM'M, simmetrico di OM'M rispetto all'asse di QP.
Essendo i triangoli QP1'P1 e PP2'P2 congruenti, P1'P1=P2'P2 ed essendo T punto medio del segmento P1P2, si ha che P1'T=TP2'.
Risulta inoltre evidente che QPP2'P1' è un rettangolo con la base doppia rispetto all'altezza, perciò, essendo T punto medio del segmento P1'P2', QPT è un triangolo rettangolo e isoscele con base QP e altezza TM' e angolo retto in T.
T si può allora trovare costruendo il quadrato di lato QP e prendendo il punto d'incontro delle diagonali.

<u>Situazione generale:</u> **M in una posizione qualsiasi.**



Sia M' il punto medio di QP. Si considerino i due triangoli QM'M e PM'M e siano QP1'P1 il triangolo ottenuto mediante una rotazione di -90° di centro Q del triangolo QM'M e PP2'P2 il triangolo ottenuto mediante una rotazione di 90° di centro P del triangolo PM'M.
Risulta perciò QM'=M'P=QP1'=PP2' e poiché QP1' e PP2' sono entrambi perpendicolari a PQ, QP1' // PP2'. Perciò il quadrilatero QPP1P2 è ovviamente un rettangolo con la base doppia rispetto all'altezza. I triangoli MM'H, P1P1'S e P2P2'R sono tra loro

congruenti, infatti P1P1’S e P2P2’R si possono ottenere da MM’H mediante rotazione; da questo segue che P1’S=P2’R.Inoltre i triangoli P1TS e P2TR sono uguali per uno dei criteri di congruenza dei triangoli, infatti, essendo per costruzione T punto medio di P1P2, si ha P1T=TP2, inoltre gli angoli in S e in R sono entrambe retti e infine gli angoli P1TS e P2TR sono uguali perché angoli opposti al vertice. Segue allora che ST=TR, ma, poiché P1’S=P2’R, T risulta anche punto medio di P1’P2’.

Analogamente ai due casi particolari, QPT è un triangolo rettangolo e isoscele con base QP e altezza TM’ e angolo retto in T.

T è allora indipendente dalla posizione di M e si può trovare costruendo il quadrato di lato QP e prendendo il punto d’incontro delle sue diagonali.